Exercícios

Exercício 1: Em cada caso, calcule $mmc(a, b)$.

(a) $a = 2 \cdot 5^3$, $b = 2^2 \cdot 7^4$.

(b) $a = 3^2 \cdot 11$, $b = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4$.

(c) $a = 5^2 \cdot 7$, $b = 5^2 \cdot 7^3$.

(d) $a = 2 \cdot 13$, $b = 3 \cdot 5$.

Solução: Procedendo como no exercício anterior, comparando as fatorações de a e de b, considerando os maiores expoentes, pode-se concluir que:

a) $mmc = 2^2 \times 5^3 \times 7^4$.

b) $mmc = 2^3 \times 3^2 \times 5^4 \times 11$

c) $mmc = 5^2 \times 7^3$.

d) $mmc = 2 \times 3 \times 5 \times 13$.

Exercício 2: Uma bibliotecária recebe 130 livros de Matemática e 195 livros de Português. Ela quer arrumá-los em estantes, colocando igual quantidade de livros em cada estante, sem misturar livros de Matemática e de Português na mesma estante. Quantos livros ela deve colocar em cada estante para que o número de estantes utilizadas seja o menor possível?

Solução: Denotando por n o número de livros que a bibliotecária vai colocar em cada estante, temos $130 \div n =$ número de estantes para os livros de Matemática e $195 \div n =$ número de estantes para os livros de Português. Isso mostra que n deve ser um divisor comum de 130 e de 195, pois o número de estantes utilizadas é inteiro. Sabemos que, quando aumentamos o denominador de uma fração, esta fração diminui; por exemplo, $\frac{27}{10}$ é menor do que $\frac{27}{8}$. Logo, quanto maior for o denominador n, menores serão as frações $\frac{130}{n}$ e $\frac{195}{n}$, o que significa que menor será o número de estantes utilizadas. Vemos, assim, que n deve ser o maior divisor comum de 130 e 195. Como as decomposições destes números em fatores primos são $130 = 2 \times 5 \times 13$ e $195 = 3 \times 5 \times 13$, segue que o mdc de 130 e 195 é $5 \times 13 = 65$. Logo, a bibliotecária vai colocar 65 livros em cada estante, o número de estantes para os livros de Matemática é $130 \div 65 = 2$ e o número de estantes para os de Português é $195 \div 65 = 3$, o que dá um total de $2 + 3 = 5$ estantes.

Exercício 3: Quantos números entre 1 e 2012 são múltiplos de 6 ou múltiplos de 15?

Solução: Para encontrar a quantidade de múltiplos de 6 compreendidos entre 1 e 2012, basta usar o algoritmo da divisão e observar que $2012 = 335 \times 6 + 2$. Isto mostra que $6 \times 1, 6 \times 2, ..., 6 \times 335$ são os múltiplos de 6 entre 1 e 2012, ou seja, temos 335 destes múltiplos. Do mesmo modo, como $2012 = 134 \times 15 + 2$, vemos que existem 134 múltiplos de 15 entre 1 e 2012. Neste total de $335 + 134 = 469$, alguns números aparecem contados duas vezes, pois são múltiplos de 6 e de 15 ao mesmo tempo. Por exemplo, os números 6×15 e $2 \times 6 \times 15$ foram contados tanto como múltiplos de 6 quanto como múltiplos de 15. Lembre que os múltiplos de 6 e de 15 são, também, múltiplos de $mmc(6, 15) = 30$. Como $2012 = 67 \times 30 + 2$, podemos concluir que existem 67 múltiplos de 30 entre 1 e 2012. Logo, o número de múltiplos de 6 ou 15 entre 1 e 2012 é $469 - 67 = 402$.

Exercício 4: Três arames medem respectivamente, $180m$, $252m$ e $324m$. Pretende-se dividi-los em pedaços de mesmo comprimento. Qual deverá ser este comprimento de modo que o número de pedaços seja o menor possível? Em quantos pedaçoos os arames serão divididos? (Compare com o exercício 1 deste encontro.)

Solução: Para que a quantidade de pedaços seja a menor possível, o tamanho de cada um destes pedaços deve ser o maior possível. E como queremos dividir os arames em pedaços do mesmo tamanho, vemos que este tamanho d deve ser um divisor de 180, 252 e 324. Assim concluímos que d é o máximo divisor comum de 180, 252 e 324.

$$
\begin{array}{rrr|l}
180\,, & 252\,, & 324 & 2 \\
90\,, & 126\,, & 162 & 2 \\
45\,, & 63\,, & 81 & 3 \\
15\,, & 21\,, & 27 & 3 \\
5\,, & 7\,, & 9 &
\end{array}
$$

Como 5, 7 e 9 são relativamente primos, paramos o processo e concluímos que $mdc(180, 252, 324) = 22 \times 32 = 36$. Portanto os arames serão divididos em pedaços de 36 metros sendo que um rolo será dividido em $180 \div 36 = 5$ pedaços, o outro rolo em $252 \div 36 = 7$ pedaços e o último rolo em $324 \div 36 = 9$ pedaços.

Exercício 5: Determine o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12.

Solução: Dizer que um número é divisível por 4, 8 e 12 é o mesmo que dizer que este número é um múltiplo, ao mesmo tempo, de 4, 8 e 12. Como sabemos, todos os múltiplos de 4, 8 e 12 são múltiplos do $mmc(4, 8, 12) = 24$. Como $2 \times 24 = 48$, $3 \times 24 = 72$, $4 \times 24 = 96$ e $5 \times 24 = 120$, concluímos que o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12 é o número 120.