

Capítulo 2

Representação dos Naturais

2.1 O Sistema Decimal

Os números naturais foram representados ao longo da história de vários modos distintos. O modo universalmente utilizado na atualidade é a representação decimal posicional. Esse sistema, variante do sistema sexagesimal utilizado pelos babilônios há cerca de 1 700 anos antes de Cristo, foi desenvolvido na China e na Índia. Nesse sistema, todo número natural é representado por uma sequência formada pelos algarismos

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Por serem 10 esses algarismos, o sistema é chamado de decimal. O sistema é também dito posicional, pois cada algarismo, além de seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função de sua posição dentro da sequência. Esse peso é uma potência de 10 e varia

do seguinte modo:

O algarismo da extrema direita tem peso $10^0 = 1$; o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso $10^1 = 10$; o seguinte tem peso $10^2 = 100$; o seguinte tem peso $10^3 = 1\,000$ etc.

Assim, o número 1 458, no sistema decimal representa o número

$$1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 8.$$

Os zeros à esquerda em um número são irrelevantes, pois por exemplo,

$$0231 = 0 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1 = 231.$$

Cada algarismo de um número possui uma *ordem*, contada da direita para a esquerda. Assim, no exemplo acima, o 8 é de primeira ordem, o 5 de segunda ordem, o 4 de terceira ordem e o 1 de quarta ordem.

Cada três ordens, também contadas da direita para a esquerda, constituem uma classe. As classes são usualmente separadas por um ponto. A seguir, damos os nomes das primeiras classes e ordens:

Classe das Unidades	{	unidades 1 ^a ordem dezenas 2 ^a ordem centenas 3 ^a ordem
Classe do Milhar	{	unidades de milhar 4 ^a ordem dezenas de milhar 5 ^a ordem centenas de milhar 6 ^a ordem

Classe do Milhão	{	unidades de milhão	7 ^a ordem
		dezenas de milhão	8 ^a ordem
		centenas de milhão	9 ^a ordem

Problema 2.1. Determine a soma de todos os múltiplos de 6 que se escrevem no sistema decimal com dois algarismos.

Problema 2.2. Fixe três algarismos distintos e diferentes de zero. Forme os seis números com dois algarismos distintos tomados dentre os algarismos fixados. Mostre que a soma desses números é igual a 22 vezes a soma dos três algarismos fixados.

Problema 2.3. Nos tempos de seus avós não existiam as calculadoras eletrônicas e por isso eram ensinadas várias regras de cálculo mental. Uma delas era a seguinte:

Seja a um número natural cujo algarismo da unidade é 5, ou seja, $a = 10q + 5$, com q um número natural. Mostre que $a^2 = 100q(q + 1) + 25$. Com isto, ache uma regra para calcular mentalmente o quadrado de a . Aplique a sua regra para calcular os quadrados dos números; 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105 e 205.

Problema 2.4. Qual é o menor número de dois algarismos? E qual é o maior? Quantos são os números de dois algarismos? Quantos algarismos precisa-se para escrevê-los?

Problema 2.5. Quantos algarismos são usados para numerar um livro de 300 páginas? Quantas vezes usa-se cada algarismo?

Curiosidade. Existe uma fórmula interessante para descrever o número $Q(x)$ de algarismos necessários para escrever todos os números

naturais de 0 a x , no sistema decimal:

$$Q(x) = n(x + 1) - (10^{n-1} + \dots + 10),$$

onde n é o número de algarismos de x (cf. *Revista do Professor de Matemática*, n. 5, p. 32).

Utilize esta fórmula para conferir a sua resposta ao Problema 2.5.

2.2 Critérios de Multiplicidade de 2, 5 e 10

Critérios de multiplicidade são algumas regras práticas para decidir se um dado número é múltiplo de algum outro prefixado.

A seguir, veremos alguns desses critérios.

Seja dado um número n escrito no sistema decimal como

$$n = n_r \dots n_1 n_0 = n_r 10^r + \dots + n_1 10 + n_0.$$

Podemos então escrever

$$n = (n_r 10^{r-1} + \dots + n_1) 10 + n_0,$$

onde n_0 é o algarismo das unidades de n .

Reciprocamente, se n é da forma $n = 10m + n_0$, onde n_0 é um dos algarismos de 0 a 9, então n_0 é o algarismo das unidades de n .

Problema 2.6. Mostre que o algarismo das unidades de um quadrado perfeito, isto é, um número da forma a^2 , onde a é um número natural,

só pode ser 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

Critério de multiplicidade de 2.

Inicialmente, consideremos a tabela:

$2 \times 0 = 0$	$2 \times 5 = 10 = 10 + 0$
$2 \times 1 = 2$	$2 \times 6 = 12 = 10 + 2$
$2 \times 2 = 4$	$2 \times 7 = 14 = 10 + 4$
$2 \times 3 = 6$	$2 \times 8 = 16 = 10 + 6$
$2 \times 4 = 8$	$2 \times 9 = 18 = 10 + 8$

Note que todo número acima é um múltiplo de 10 somado com um dos números: 0, 2, 4, 6, ou 8.

Suponha agora que um dado número natural n seja par, ou seja, $n = 2m$, onde m é um número natural. Escrevendo m da forma $m'10 + m_0$, onde m_0 é o algarismo das unidades de m , temos

$$n = 2(m'10 + m_0) = 2m'10 + 2m_0.$$

Sendo $2m_0$ um dos números da tabela, temos que ele é um múltiplo de 10 somado com um dos números: 0, 2, 4, 6, ou 8. Logo, $n = 2m'10 + 2m_0$ é um múltiplo de 10 somado com um dos números: 0, 2, 4, 6, ou 8, e, portanto, o seu algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6, ou 8.

Problema 2.7. Mostre a recíproca do que provamos acima, ou seja, mostre que é par um número cujo algarismo das unidades é um dos algarismos 0, 2, 4, 6 ou 8.

Juntando essas informações temos o seguinte resultado:

Teorema (Critério de Multiplicidade de 2)

Um número é múltiplo de 2 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é par.

Critério de multiplicidade de 5 e de 10.

Seja n um número natural escrito na forma $n = 10m + n_0$, onde n_0 é o algarismo das unidades de n . Como $10m$ é múltiplo de 5 e de 10, temos que n é múltiplo de 5 ou de 10 se, e somente se, n_0 é múltiplo de 5 ou de 10, respectivamente (cf. Problema 1.21). Isto ocorre se, e somente se, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 5$, no primeiro caso; e $n_0 = 0$, no segundo. Assim, provamos o seguinte resultado:

Teorema (Critério de Multiplicidade de 5 ou de 10)

Um número é múltiplo de 5 se, e somente se, o seu algarismo das unidades for 0 ou 5. Um número é múltiplo de 10 se, e somente se, o seu algarismo das unidades for 0.

Problema 2.8. Determine se é múltiplo de 2, de 5 ou de 10 cada número a seguir:

17, 22, 25, 28, 30, 35 420, 523 475.

Problema 2.9. Com a informação de que 100 é múltiplo de 4 e de 25, você seria capaz de achar um critério de multiplicidade de 4 ou de 25?

SUGESTÃO: Note que um número $n = n_r \cdots n_2 n_1 n_0$ pode ser escrito na forma $n = n_r \cdots n_2 \times 100 + n_1 n_0$.

Problema 2.10. Com a informação de que 1000 é múltiplo de 8 (respectivamente de 125), você seria capaz de achar um critério de multiplicidade de 8? (respectivamente de 125?)

SUGESTÃO: Note que um número $n = n_r \cdots n_3 n_2 n_1 n_0$ pode ser escrito na forma $n = n_r \cdots n_3 \times 1000 + n_2 n_1 n_0$.

2.3 Critérios de Multiplicidade de 9 e de 3

Inicialmente note os seguintes fatos:

$$10 - 1 = 9 = 1 \times 9,$$

$$10^2 - 1 = 100 - 1 = 99 = 11 \times 9,$$

$$10^3 - 1 = 1.000 - 1 = 999 = 111 \times 9,$$

$$10^4 - 1 = 10.000 - 1 = 9.999 = 1.111 \times 9.$$

Em geral, para n um número natural não nulo, temos

$$10^n - 1 = \underbrace{11 \cdots 1}_{n \text{ vezes}} \times 9.$$

Portanto, todos os números da forma $10^n - 1$ são múltiplos de 9 e também de 3, já que 9 é múltiplo de 3.

Seja dado agora um número n escrito no sistema decimal como

$$n = n_r \cdots n_1 n_0 = n_r 10^r + \cdots + n_1 10 + n_0.$$

Subtraímos a soma $n_r + \cdots + n_1 + n_0$, dos algarismos que compõem

o número n , de ambos os lados da igualdade acima:

$$\begin{aligned} n - (n_r + \dots + n_1 + n_0) &= n_r 10^r - n_r + \dots + n_1 10 - n_1 + n_0 - n_0 \\ &= (10^r - 1)n_r + \dots + (10 - 1)n_1. \end{aligned}$$

Note agora que a última expressão é sempre múltiplo de 9 (logo, de 3). Portanto, pelo Problema 1.21, temos que n é múltiplo de 9 ou de 3 se, e somente se, o número $n_r + \dots + n_1 + n_0$ é múltiplo de 9 ou de 3. Assim, obtemos o seguinte resultado:

Teorema (Critério de Multiplicidade de 9 ou de 3)

Um número $n = n_r \dots n_1 n_0$ é múltiplo de 9 ou de 3 se, e somente se, o número $n_r + \dots + n_1 + n_0$ for múltiplo de 9 ou de 3, respectivamente.

O teorema acima reduz o problema de saber se um dado número é múltiplo de 9 ou de 3 ao problema de saber se um outro número obtido a partir desse é múltiplo de 9 ou de 3. O que ganhamos com isto? Bem, o número $n_r + \dots + n_1 + n_0$ é consideravelmente menor do que n e se ele ainda for grande podemos aplicar o teorema a ele obtendo um número ainda menor e assim, sucessivamente, até encontrar um número para o qual seja fácil decidir se é múltiplo de 9 ou de 3.

Por exemplo, dado o número 257985921, somando os seus algarismos obtemos $2 + 5 + 7 + 9 + 8 + 5 + 9 + 2 + 1 = 48$. Repetindo o mesmo procedimento para o número 48, obtemos $4 + 8 = 12$, o qual é múltiplo de 3 mas não de 9. Logo, o número dado inicialmente é múltiplo de 3, mas não múltiplo de 9.

Problema 2.11. Determine se é múltiplo de 3 ou de 9 cada um dos

números a seguir:

108, 111, 225, 328, 930, 35 424, 523 476.

2.4 Números Primos

Os números primos são números especiais que desempenham um papel importante dentro da teoria e entre outras coisas os seus produtos representam todos os números naturais, como veremos ainda nesta seção.

Definição. Um número natural diferente de 0 e de 1 e que é apenas múltiplo de 1 e de si próprio é chamado de *número primo*. Um número diferente de 0 e de 1 que não é primo é chamado de *número composto*.

Por exemplo, 2, 3, 5 e 7 são números primos, enquanto 4, 6 e 8 são números compostos, por serem múltiplos de 2.

Mais geralmente, todo número par maior do que 2 não é primo, ou seja, é composto (justifique).

Note que a definição acima não classifica os números 0 e 1 nem como primos nem como compostos. Exceto esses dois números, todo número natural ou é primo ou é composto.

Problema 2.12. Diga quais dos seguintes números são primos e quais são compostos:

9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 21, 23, 47, 49.

Certamente, os números compostos são em número infinito, pois