

**Formação de Professores da Educação Básica e de Alunos de Licenciatura  
OBMEP na Escola e PIC 2016  
Grupo N1 - Ciclo 3**

O Programa Acadêmico desta formação de professores e alunos de licenciatura é constituído de 6 ciclos de 4 encontros cada. Neste terceiro ciclo serão realizados os seguintes encontros:

- Terceiro encontro de formação entre professores, alunos e o coordenador
- Aritmética 3
- Contagem 3
- Geometria 3

**Segundo encontro entre professores e alunos de licenciatura com o coordenador**

No início de todos os ciclos, a primeira atividade a ser realizada é o encontro de formação entre professores e alunos de licenciatura com os coordenadores. Neste encontro espera-se que sejam discutidos os conteúdos, os materiais, as videoaulas e os exercícios propostos dos três assuntos que serão ministrados nas aulas para os alunos medalhistas e convidados.

Antes da realização deste encontro de formação recomendamos que os professores, os alunos e os coordenadores:

- façam um estudo preliminar de todo este roteiro.
- assistam os vídeos indicados do Portal da Matemática ou do canal PICOBEMP no YouTube.
- resolvam os exercícios propostos.
- anotem suas dúvidas.

Durante esse encontro de formação deseja-se que:

- Seja realizado um estudo dos materiais indicados de aritmética, de contagem e de geometria e que sejam esclarecidas as dúvidas.
- Caso exista infra-estrutura disponível, sejam discutidas algumas videoaulas.
- O Coordenador deve promover discussões dos conceitos e dos exercícios mais importantes das aulas que serão ministradas para os alunos sobre os temas de aritmética, contagem e geometria.
- O Coordenador auxilie os professores na preparação das aulas.

- Ocorra uma troca de experiências e o compartilhamento de ideias entre os professores, os alunos e os coordenadores.

- Assuntos a serem abordados (temas das aulas para alunos medalhistas e convidados)

**Aritmética:** múltiplos, divisores, fatoração e critérios de divisibilidade.

**Contagem:** resolução de problemas da obmep.

**Geometria:** ângulos e triângulos.

No que segue vamos detalhar os conteúdos destas três aulas, indicando as referências bibliográficas e as videoaulas relacionadas. Este detalhamento pode ser utilizado tanto no encontro de formação entre professores e alunos de licenciatura com os coordenadores, quanto como o roteiro da aula que deve ser ministrada para os alunos medalhistas e convidados.

### **Aritmética 3: múltiplos, divisores, fatoração e critérios de divisibilidade.**

- Assuntos a serem abordados:

**Aritmética** – múltiplos, divisores, fatoração e critérios de divisibilidade.

- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos as seções 2.4 e 2.5 e 2.6 da apostila do PIC “Encontros de Aritmética”, F. Dutenhfner, L. Cadar.  
<http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf>

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:

6º Ano do Ensino Fundamental – Módulo “Divisibilidade” – Aula “múltiplos e divisores” – videoaula:

- [Múltiplos e divisores](#)

6º Ano do Ensino Fundamental – Módulo “Divisibilidade” – Aula “critérios de divisibilidade” – videoaula:

- [Critérios de Divisibilidade 1](#)
- [Critérios de Divisibilidade 2](#)
- [Critérios de Divisibilidade 4](#)

- Sugestão para o desenvolvimento da aula: o objetivo desta aula é fazer um estudo dos principais critérios de divisibilidade. Para conseguir fazer isso devemos, primeiro, introduzir alguns conceitos. Desse modo, esta aula pode começar com o estudo da seção 2.4 da apostila Encontros de Aritmética. Nesta seção são definidos os conceitos de múltiplos e divisores. Chamar a atenção de que estes conceitos estão totalmente relacionados. Por exemplo, em uma multiplicação como  $42 = 3 \times 14$ , podemos ver o número 42 como um múltiplo de 3 e de 14, e também podemos ver os números 3 e 14 como divisores de 42. Daí os conceitos de “ser múltiplo de” e “ser divisível por” são sinônimos: dizer que 42 é múltiplo de 3 é o mesmo que dizer que 42 é divisível por 3.

Após apresentar as definições, resolver o exercício 27 da página 48. Este exercício explora uma propriedade importante da divisibilidade: se o número  $a$  é múltiplo de  $n$ , então a soma  $a+b$  é um múltiplo de  $n$ , somente quando  $b$  é um múltiplo de  $n$ . Explorar esta propriedade discutindo os exercícios 28, 30 e 31.

A seção 2.5 da apostila Encontros de Aritmética explora o conceito de número primo e a fatoração de um número natural como um produto de números primos. Rever esses conceitos calculando algumas fatorações, como aquelas apresentadas nos exercícios 32 e 33 da página 51. Em seguida, explorar o exercício 34 pois ele apresenta uma consequência muito importante da fatoração: os únicos divisores primos de um número natural são aqueles primos que aparecem na fatoração do número dado.

Os exercícios 35 e 36 não precisam ser explorados nesta aula, pois eles tratam do cálculo da quantidade de divisores de um número natural.

No Portal da Matemática, no 6º Ano do Ensino Fundamental, no Módulo “Divisibilidade”, na Aula “múltiplos e divisores” existem 32 exercícios resolvidos e existe um material teórico muito interessante que também pode ser utilizado pelos professores e pelos alunos. Sugerimos que em algum momento da aula, o professor apresente alguns desses exercícios para a turma, motivando o estudo dos demais exercícios em casa.

Terminado o estudo das seções 2.4 e 2.5, agora o professor pode passar para o estudo dos critérios de divisibilidade. Na seção 2.6 da apostila Encontros de Aritmética são apresentados os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10. Resolver os exercícios 37-40 explorando bem o entendimento desses critérios de divisibilidade. Em seguida, como aplicação da teoria estudada, podem ser discutidas as soluções dos exercícios 41-47, das páginas 58-61.

Pode ser que durante a aula presencial, não seja possível a discussão de todos os exercícios das seções 2.4, 2.5 e 2.6 da apostila Encontros de Aritmética. Isto não tem problema algum pois o estudo dessas seções vai continuar no Fórum Hotel de Hilbert. Na aula presencial, o professor deve cuidar para que pelo menos os principais

tópicos sejam abordados. Para deixar mais claro o que isso significa, apresentamos alguns exercícios da apostila que o professor não pode deixar de discutir na aula.

Exercícios 27 – página 48

Exercícios 32 e 33 – página 51

Exercício 34 – página 52

Exercícios 37-40 – páginas 56-57

Ao final da aula, o professor deve incentivar que os alunos participem do Portal da Matemática, assistindo as videoaulas sugeridas, estudando os exercícios resolvidos e realizando os testes das respectivas aulas.

### Contagem 3: permutação e resolução de exercícios de contagem

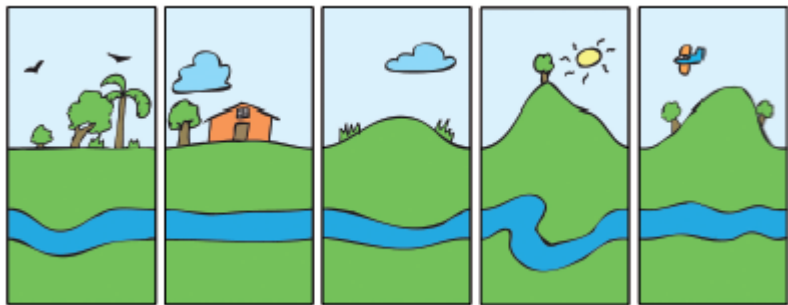
No ciclo 1 estudamos o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. No ciclo 2 estudamos o conceito de permutação e resolvemos alguns exercícios de contagem. O objetivo deste terceiro ciclo é aplicar a teoria estudada na resolução de exercícios foram questões de provas da OBMEP.

No que segue, organizamos uma coletânea de algumas questões de contagem retiradas de provas da obmep. Sugerimos que os professores entreguem os enunciados destas questões para os alunos e trabalhem com essas questões nesta aula de contagem.

#### Exercício 1. (OBMEP 2011 - N2Q13 – 1ª fase)

Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?

- (a) uma semana
- (b) um mês
- (c) dois meses
- (d) quatro meses
- (e) seis meses



#### Exercício 2. (OBMEP 2015 - N1Q5 – 1ª fase)

Maria faz uma lista de todos os números de dois algarismos usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. Por exemplo, os números 20 e 22 estão na lista de Maria, mas 02 não. Quantos números diferentes há nessa lista?

- (a) 8
- (b) 9
- (c) 10
- (d) 12
- (e) 16

#### Exercício 3. (OBMEP 2008 - N1Q18 – 1ª fase)

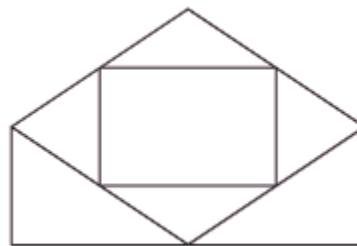
Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma branca, uma azul e uma verde, e quatro calças: uma marrom, uma preta, uma azul e uma verde. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?

- (a) 12
- (b) 14
- (c) 16
- (d) 18
- (e) 20

**Exercício 4. (OBMEP 2013 - N2Q19 – 1ª fase)**

De quantas maneiras diferentes é possível pintar a figura, de modo que cada uma das regiões seja pintada com uma das cores azul, verde ou preto e que regiões cujas bordas possuem um segmento em comum não sejam pintadas com a mesma cor?

- (a) 68
- (b) 96
- (c) 108
- (d) 120
- (e) 150



**Exercício 5. (OBMEP 2012 - N2Q16 – 1ª fase)**

Quantos são os números naturais entre 0 e 999 nos quais aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3?

- (a) 192
- (b) 204
- (c) 217
- (d) 225
- (e) 254

**Exercício 6. (OBMEP 2010 - N2Q19 – 1ª fase)**

De quantas maneiras é possível escolher três números inteiros de 1 a 19, de modo que o maior e o menor sejam ímpares e o outro seja par?

- (a) 165
- (b) 150
- (c) 140
- (d) 125
- (e) 100

**Exercício 7. (OBMEP 2014 - N2Q18 – 1ª fase)**

O número 2014 tem quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0. Quantos números possuem exatamente essas características?

- (a) 60
- (b) 180
- (c) 360
- (d) 420
- (e) 540

**Exercício 8. (OBMEP 2015 – N1Q6 – 2ª fase)**

Apertando teclas de zero a nove de um cofre, Pedro cria uma senha de 11 algarismos.

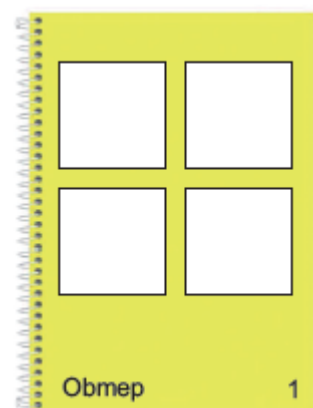
- (A) Quantas são as senhas que começam com 20152015?
- (B) Quantas são as senhas que contêm todos os algarismos juntos e em ordem crescente, isto é, quantas são as senhas que contêm o bloco 0123456789?
- (C) Pedro quer criar uma senha de forma que, quando se exclui um de seus algarismos, restam os algarismos de 0 a 9 em ordem crescente. Por exemplo, 80123456789 e 01234456789 são senhas possíveis, mas 01324567890 não. Nessas condições, quantas senhas Pedro pode criar?

**Exercício 9. (OBMEP 2014 - N2Q2 – 2ª fase)**

Rosa tem quatro cartões quadrados e cada um deles apresenta um polígono regular diferente, de 3 a 6 lados, como mostrado na ilustração.



Ela quer colar esses cartões nos quatro espaços disponíveis da primeira página de um álbum. Dependendo de como ela cola o cartão, as figuras podem ser vistas de maneiras diferentes. Por exemplo, girando o cartão com o triângulo, ele pode ser visto de quatro maneiras diferentes, enquanto que o quadrado só pode ser visto de uma única maneira, como está ilustrado a seguir.



- (A) De quantas maneiras diferentes o pentágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum?
- (B) De quantas maneiras diferentes o hexágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum?
- (C) De quantas maneiras diferentes Rosa pode colar os quatro cartões nos quatro espaços da primeira página do álbum?

**Exercício 10. (OBMEP 2012 - N1Q5 – 2ª fase)**

Vítor tem 24 cartões, sendo oito azuis, oito brancos e oito verdes. Para cada cor, ele numerou os cartões de 1 a 8.

- (A) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões azuis de modo que a soma de seus números seja igual a 9?
- (B) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?
- (C) De quantas maneiras Vítor pode escolher 3 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

**Exercício 11. (OBMEP 2009 - N1Q5 – 2ª fase)**

Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul, preto ou vermelho de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir cada uma destas figuras?



Figura 1

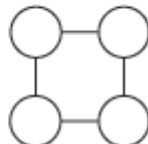


Figura 2

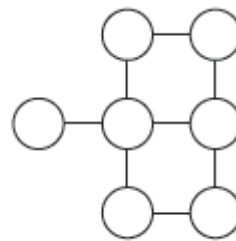


Figura 3

**Exercício 12. (OBMEP 2005 - N1Q6 – 2ª fase)**

Pedrinho escreveu todos os números inteiros compreendidos entre 100 e 999 cuja soma dos algarismos é 12. Por exemplo, os números 129 e 750 aparecem entre os números escritos.

- (A) Quantos números escritos têm apenas dois algarismos iguais?
- (B) Quantos números escritos são formados apenas por algarismos ímpares?



## Geometria 3: ângulos e triângulos

- Assuntos a serem abordados: **Geometria** – ângulos e triângulos

- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos as seções 5.2 e 5.3 da apostila do PIC “Encontros de Geometria”, F. Dutenhefner, L. Cadar. <http://www.obmep.org.br/docs/Geometria.pdf>.

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:

8º Ano do Ensino Fundamental – Módulo: “elementos básicos de geometria plana – parte 1” – Aula: “ângulos” – Vídeoaulas:

- [Ângulos](#)
- [Ângulos consecutivos e adjacentes. Ângulos suplementares](#)
- [Ângulos opostos pelo vértice. Bissetriz de um ângulo](#)

8º Ano do Ensino Fundamental – Módulo: “elementos básicos de geometria plana – parte 2” – Aula: “triângulos – propriedades básicas e alguns problemas” – Vídeoaulas:

- [Soma dos ângulos internos de um triângulo](#)
- [Classificação de triângulos](#)

- Sugestão para o desenvolvimento da aula:

Nas duas primeiras aulas de geometria, estudamos e resolvemos problemas envolvendo áreas e perímetros de figuras geométricas simples. Esses conceitos são, por si só, muito importantes, além de sempre estarem presentes nas provas da OBMEP. Agora, nesta terceira aula de geometria, vamos estudar ângulos e triângulos. Estes conteúdos podem ser explorados como está explicado nas seções 5.2 e 5.3 da apostila Encontros de Geometria do PIC.

Na seção 5.2 é apresentado o conceito de ângulo e o conceito de graus, para medir ângulos. O uso do transferidor deve ser explorado na aula. No final desta seção são apresentados 10 exercícios. Destes, sugerimos que os professores trabalhem pelo menos com:

Exercício 4 – página 16

Exercício 5 – página 16

Exercício 6 – página 17

Exercício 8 – página 17

Na seção 5.3, são explorados os conceitos de ângulos internos e ângulos externos de um triângulo qualquer. Além disso são deduzidos os valores das somas dos ângulos internos e externos de um triângulo e são propostos 10 exercícios. Após apresentar os conceitos e explorar os exemplos desta seção, recomendamos que os professores trabalhem com pelo menos as soluções dos seguintes exercícios.

Exercício 2 - página 34

Exercício 5 – página 35

Exercício 7 – página 36

Durante a aula, o professor pode utilizar e pode motivar que os alunos utilizem as videoaulas indicadas do Portal da Matemática. Além dos vídeos, estão disponibilizados vários exercícios resolvidos e materiais didáticos muito interessantes.