TEORIA DOS NÚMEROS - EXERCÍCIOS DE DIVISIBILIDADE

**01 – Mostrar que se a | b,  então  (-a) | b,  a | (-b)  e  (-a) | (-b).**

**Solução:**

Se a | b então  ∃q ∈ Z | b = aq.

(i) b = aq => b = (-1)(-1)aq  = (-1)a. (-1)q = (-a)(-q).  
Como q é inteiro, (-q) também pertence a Z. Portanto, existe (-q) inteiro tal que

b = (-a).(-q) => (-a) | b.  
(ii) b = aq => (-1)b = (-1)aq   => (-b) = a(-q). Conforme justificado acima,  a | (-b).  
(iii) b = aq => (-1)b = (-1)aq  => (-b) = (-a).q => (-a) | (b). Conforme justificativa em (i)

**02 – Sejam a, b e c inteiros. Mostrar que:**

**(a) se a | b, então a | bc.**

**Solução**: a | b =>  b = aq,  q ∈ Z  => bc = aqc => bc = a(qc).    
Se q e c são inteiros, qc é inteiro (multiplicação em Z).  
Portanto,  existe um inteiro (qc) tal que  bc = a(qc) => a | bc. Cqd  
  
**(b) se a | b e se a | c, então a2 | bc.**

**Solução:**  
a | b  => b = aq, q ∈ Z  (I)  
a | c  => c = aq’, q’ ∈ Z  (II).  
Multiplicando as igualdades obtidas em I e II, resulta  bc = a2(qq’).  Como q e q’ são inteiros, qq’ é inteiro.  
Assim, existe o inteiro qq’, tal que bc = a2(qq’). Portanto, a2 | bc. Cqd.

**(c)  a | b  se e somente se ac | bc  (c ≠ 0).**

**Solução:**  
a | b ⇔ b = aq <=> bc = aqc  (a implicação nos dois sentidos só é válida para c ≠ 0) <=>  bc = (ac) q <=>  ac | bc. Cqd.

**03 – Verdadeiro ou falso: se a | (b + c), então a | b ou a | c.**

**Solução:** a afirmativa é falsa pois  3|9 ⇔ 3 | (4 + 5), mas 3 ~| 4 e 3 ~| 5.

**04 – Mostrar que, se a é um número inteiro qualquer, então um dos inteiros a, a + 2, a + 4 é divisível por 3.**

**Solução:** De acordo com o algoritmo da divisão, a = 3q ou  a = 3q + 1 ou a = 3q + 2. Isto é, os restos da divisão por 3 somente podem ser 0, 1 ou 2.  
Se a = 3q, está comprovada a hipótese.  
Se a = 3q + 1, então  a + 2 = 3q + 2 + 1 = 3q + 3 = 3(q + 1) ⇒ a + 2 é divisível por 3.  
Se a = 3q + 2, então a + 1 = 3q + 2 + 1 = 3q + 3 = 3(q + 1) ⇒ a + 1 é divisível por 3.  
Portanto, uma das três formas será divisível por 3.

**05 – Sendo a um inteiro qualquer, mostrar:**

**(a) 2|a(a + 1).**

**Solução:** pelo algoritmo da divisão, a = 2n ou a = 2n + 1.  
Se a = 2n, então  a (a + 1) = 2n(2n + 1) = 2[n(2n+1)] = 2q ⇒ 2 |a(a + 1).  
Se a = 2n + 1, então a(a + 1) = (2n + 1)(2n + 1 + 1) = (2n + 1)(2n + 2) = 2(n + 1)(2n + 1) = 2q ⇒ 2 | a(a + 1).  
Portanto, qualquer que seja a, 2 | a(a + 1). Cqd.

**(b) 3 | a(a + 1)(a + 2) .**

**Solução:**  Pelo algoritmo da divisão,  a = 3n ou a = 3n + 1 ou a = 3n + 2.  
Se a = 3n,  a(a + 1)(a + 2) = 3n(3n + 1)(3n + 2) = 3[n(n + 1)(n + 2)] = 3q ⇒ 3 | a(a + 1)(a + 2)  
Se a = 3n + 1,  a(a + 1)(a + 2) = (3n + 1)(3n + 1 + 1)(3n + 1 + 2) = (3n + 1)(3n + 2)(3n + 3) =  
= (3n + 1)(3n + 2)3(n + 1) = 3[(3n + 1)(3n + 2)(n + 1)] ⇒ 3 | a(a + 1)(a + 2)  
Se a = 3n + 2,  a(a + 1)(a + 2) = (3n + 2)(3n + 2 + 1)(3n + 2 + 2) = (3n + 2)((3n + 3)(3n + 4) =  
= (3n + 2)3(n + 1)(3n + 4) = 3[(3n +2)(n + 1)(3n + 4)] = 3q ⇒ 3 | a(a + 1)(a + 2).  
Portanto, qualquer que seja a, 3 | a(a + 1)(a + 2). Cqd.

**06 – Mostrar que um inteiro qualquer da forma 6k + 5 também é da forma 3k + 2.**

**Solução:**Se n = 6k + 5 = 6k + 3 + 2 = 3 (k + 3) + 2 = 3k’ + 2 ⇒ n é da forma 3k + 2. Cqd.

**07 – Mostrar que todo inteiro ímpar é da forma 4k + 1 ou 4k + 3.**

**Solução:** Seja n um número inteiro. Pelo algoritmo da divisão n = 4k ou n = 4k + 1 ou n = 4k + 2 ou n = 4k + 3.  
Se n = 4k,  então n = 2(2k) ⇒ n é par.  
Se n = 4k + 1,  então n = 2(2k) + 1 è n = 2k’ + 1è 2 | n è n é ímpar.  
Se n = 4k + 2,  então n = 2(2k + 1) è n = 2k’ ⇒ n é par.  
Se n = 4k + 3,  então n = 4k + 2 + 1 = 2(2k + 1) + 1 ⇒ n = 2k’ + 1 ⇒ n é impar.  
Portanto, n é ímpar se apresentar uma das formas 4k + 1 ou 4k + 3. Cqd.

**08 – Mostrar que o quadrado de um inteiro qualquer é da forma 3k ou 3k + 1.**

**Solução:** De acordo com o algoritmo da divisão  n = 3k’  ou n = 3k’ + 1 ou  n = 3k’ + 2.  
Assim,  
Se n = 3k’,  então :  n2 = 9k’ = 3(3k’) = 3k  
Se n = 3k’ + 1, então:  n2 = (3k’ + 1)2 = 9k’2 + 6k’ + 1 = 3(3k’2 + 2k’) + 1 = 3k + 1.  
Se n = 3k’ + 2, então,  n2 = (3k’ + 2)2 = 9k’2 + 12k’ + 4 =  9k’2 + 12k’ + 3 + 1 = 3(3k’2 + 4k’ + 1) + 1 = 3k + 1.  
Portanto, n2 terá uma das formas, 3k ou 3k + 1.

**09 – Mostrar que o cubo de um inteiro qualquer é de uma das formas 9k, 9k + 1 ou 9k + 8.**

**Solução:** Temos n = 3k’   ou  n = 3k’ + 1  ou n = 3k’ + 2.  
Se n = 3k’,  então   n3 = (3k’)3 = 27k’3 = 9(3k’3) = 9k.  
Se n = 3k’ + 1, então n3 = (3k’ + 1)3 = (3k’)3 + 3.(3k’)2.1 + 3(3k’)12 + 13 = 27k’3 + 27k’2 + 9k’ + 1 =  
= 9(3k’3 + 3k’2 + k’) + 1 = 9k + 1.  
Se n = 3k’ + 2, então n3   = (3k’)3 + 3.(3k’)2.2 + 3(3k’)22 + 23 =   
= 27k’3 + 54k’2 + 36k’ + 8 = 9(3k’3 + 6k’2 + 4k’) + 8 = 9k + 8.  
Portanto, o cubo de um inteiro tem uma das formas: 9k, 9k + 1 ou 9k + 8.

**10 – Mostrar que n(n + 1)(2n + 1)/6 é um inteiro, qualquer que seja o inteiro positivo n.**

**Solução:** Devemos provar que 6 | n(n + 1)(2n + 1).

**(1º)  Qualquer que seja  n (n + 1) é múltiplo de 2, ou seja 2 |n(n + 1) pois,   
pelo algoritmo da divisão, n = 2k ou n = 2k + 1.**  
Se n = 2k,  2 | n è 2 | (n)(n + 1)  
Se n = 2k + 1,  temos que n + 1 = 2k + 1 + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1) è   
è 2 | (n + 1) è 2 | n(n + 1).  
Portanto, qualquer que seja na 2 | n (n + 1) è 2 | n(n + 1)(2n + 1).

**(2º) Qualquer se seja n,  n = 3k ou n = 3k + 1 ou n = 3k + 2.**  
Se n = 3k,  3 | n è 3 | n(n + 1)(2n + 1.  
Se n = 3k + 1,  2n + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 6k + 2 + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1) ⇒ 3 | (2n + 1) ⇒ 3 ! n (n + 1)(2n + 1)  
Se 3 = 3k + 2,  n + 1 = 3k + 2 + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1) ⇒ 3 | (n + 1) è 3 | n(n + 1)(2n + 1).  
Portanto, qualquer que seja n, 3 | n (n + 1)(2n + 1).  
Se 2 | n (n + 1)(2n + 1) e 3 | n (n + 1)(2n + 1),  6 | n(n + 1)(2n + 1) pois 2 e 3 são primos entre si.  
Assim, ∃ q, inteiro tal que n(n + 1)(2n + 1) = 6q è ao dividir n (n + 1)(2n + 1) por 6 , o resultado é o inteiro q. Cqd.

**11 – Mostrar que se a | (2x – 3y) e se a | (4x – 5y), então a | y.**

**Solução:**    
Se a | (2x – 3y) então, existe o inteiro q, tal que (2x – 3y) = aq ⇒ 2(2x – 3y) = 2aq ⇒ 4x – 6y = 2aq. (I)  
Da mesma forma, se a | (4x – 5y), existe o inteiro q’, tal que (4x – 5y) = aq’. (II)  
Fazendo (II) – (I), resulta  (4x – 5y) – (4x – 6y) = aq’ – 2aq ⇒ 4x – 5y – 4y + 6y = a(q’ – 2q) ⇒ y = a(q’ – 2q).  
Como q’ e 2q são inteiros, (q’ – 2q) é inteiro. Portanto existe um inteiro, tal que y = ak ⇒ a | y.

**12 – Sendo a e b dois inteiros quaisquer, mostrar que os inteiros a e a + 2b têm sempre a mesma paridade.**

**Solução:** Se a é par, então a = 2q, q inteiro e a + 2b = 2q + 2b = 2(q + b) = 2k, k inteiro (soma de dois inteiros). Portanto: a + 2b é par pois 2 | (a + 2b). Assim, a e a + 2b são ambos pares, isto é têm a mesma paridade.  
Se a é impar, então a = 2q + 1, q inteiro e a + 2b = 2q + 1 + 2b = 2(q + b) + 1 = 2k + 1 è a + 2b é ímpar. Portanto, a e a + 2b são ambos ímpares. Têm a mesma paridade.  
De acordo com as duas únicas situações possíveis para “a”,  a e a + 2b sempre terão a mesma paridade. Cqd.

**13 – Sendo m e n dois inteiros quaisquer, mostrar que os inteiros m + n e m – n têm sempre a mesma paridade.**

**Solução:**Três são as possíveis situações para m e n: (1) ambos pares; (b) ambos ímpares e (3) um par e um ímpar.  
(1) Ambos pares m = 2k e n = 2k’.  
     Temos então:  
         m + n = 2k + 2k’ = 2(k + k’) ⇒ m + n é par   
         m – n = 2k – 2k’ = 2(k – k’) ⇒ m – n é par

(2) Ambos ímpares m = 2k + 1 e n = 2k’ + 1  
     Temos:     
        m + n = 2k + 1 + 2k’ + 1 = 2(k + k’ + 1) ⇒ m + n é par  
        m – n = 2k – 1 + 2k’ – 1 = 2 ( k + k’ – 2) ⇒ m – n é par

(3) Um ímpar e outro par; m = 2k + 1 e n = 2k’  
     Temos:   
        m + n = 2k + 1 + 2k’ = 2(k + k’) + 1 ⇒ m + n é ímpar.  
        m – n = 2k + 1 – 2k’ = 2(k – k’) + 1 ⇒ m – n é ímpar.  
Assim, nas três únicas situações possíveis, m + n e m – n têm a mesma paridade.Cqd.

**14 – Determinar os inteiros positivos que divididos por 17 deixam um resto igual ao quadrado do quociente.**

**Solução:** Seja N o inteiro positivo. Pelo algoritmo da divisão e pelas condições dadas, temos:  
N = 17q + q2.  Como o resto é um quadrado perfeito e deve ser menor que 17, “q” só pode assumir um dos valores: 1, 2, 3 ou 4 pois seus quadrados são 1, 4, 9 e 16.  
Portanto, N = 17.1 + 1 = 18,   ou N = 17.2 + 4 = 38, ou N = 17.3 + 9 = 60, ou N = 17.4 + 16 = 84.  
Resposta: Os inteiros positivos são: 18, 38, 60 e 84.

**15 – Achar inteiros “a”, “b”  e “c”  tais que a | bc mas a http://ellalves.net.br/assets/grocery_crud/texteditor/ckfinder/userfiles/images/simbolos/ndivide.pngb  e ahttp://ellalves.net.br/assets/grocery_crud/texteditor/ckfinder/userfiles/images/simbolos/ndivide.pngc.**

**Solução:** Basta escolher números b e c que não sejam múltiplos de a, mas que na decomposição dos apareçam  fatores que multiplicados resultam no valor de a.  
Eis alguns:  
6 = 2.3 . Como 6 ~|8   e 6 ~|15  , mas  em 8 aparece o fator 2 (8 = 23) e em 15 aparece o fator 3 (15 = 3.5) ,   
6 | 8.15.  Portando: a = 6, b = 8 e c = 15 satisfaz as condições. Resposta: (6, 8, 15)  
10 = 2.5.   Como  10 http://ellalves.net.br/assets/grocery_crud/texteditor/ckfinder/userfiles/images/simbolos/ndivide.png12  e 10http://ellalves.net.br/assets/grocery_crud/texteditor/ckfinder/userfiles/images/simbolos/ndivide.png15, mas em 12 aparece o fator 2 (12 = 22.3) e em 15 tem o fator 5 (15 = 3.5), 10 | 12.15. Portando a = 10, b = 12 e c = 15, satisfaz as condições. Resposta: (10, 12, 15)  
Existem infinitas soluções.

**16 – Verdadeiro ou falso: se a | c   e se b | c, então a | b.**

**Solução:** A afirmativa é falsa pois 2 | 6  e 3 | 6  pois 2 ~|  3.

**17 – Demonstrar:**

**(a)  Se  “a “ é um inteiro ímpar, então  24 | a(a2 – 1).**

**Solução:**  Sendo a um inteiro ímpar, podemos escrever a = 2k + 1, com k inteiro.  
Assim,  a(a2 – 1) = (2k + 1)[(2k + 1)2 – 1)] = (2k + 1)[(2k + 1) + 1][(2k + 1) – 1] =   
= (2k + 1)(2k + 2)(2k) = 4k(k + 1)(2k + 1).  
Conforme foi provado no exercício 10,  k(k + 1)(2k + 1) /6 é um inteiro, então  k(k + 1)(2k + 1) = 6q.  
Portanto, a(a2 – 1) = 4.6q ⇔ a(a2 – 1) = 24q ⇔  24 | a(a2 – 1). Cqd.

(b) Se “a”  e “b”  são inteiros ímpares, então 8 | a2 – b2.

Solução:- Se “a”  e  “b”   são inteiros ímpares, então  pode-se escrever a = 2k + 1 e b = 2k’ + 1.  
Assim, a2 – b2 = (2k + 1) 2  - (2k’ + 1) 2 = (2k + 1 + 2k’ + 1)(2k + 1 – 2k’ – 1) =   
= (2k + 2k’ + 2)(2k – 2k’) = 2(k + k’ + 1).2(k – k’) = 4(k + k’ + 1)(k – k’).  
Se k – k’ é par , teremos:  a2 – b2 = 4(k + k’ + 1)2.q = 8q(k + k’ + 1) Û  8 | a2 – b2.  
Se k – k’ é ímpar, então k + k’ também é ímpar, conforme foi demonstrado no exercício 13.

Se k + k’ é ímpar, k + k’ + 1 é par.  Em conseqüência:  a2 – b2 =4.2q(k – k’) ⇔ a2 – b2 = 8q(k – k’) ⇔  8 | (a2 – b2).

**19 – Na divisão do inteiro a = 427 por um inteiro positivo “b”, o quociente é 12 e o resto é r. Achar o divisor “b” e o resto “r”.**

**Solução:** Pelo algoritmo da divisão temos:  427 = 12b + r .  
Dividindo 427 por 12 resulta:  427 = 12.35 + 7 è uma das soluções é b = 35 e r = 7.  
Outros valores para q são inferiores a 35, pois 12 x 36 = 432.  
Assim, 427 = 12.34 + 19, com b = 34 e r = 19  
         427 = 12.33 + 31, com b = 33 e r = 31  
Como 427 : 32 é maior que 12, as únicas soluções são b = 35 e r = 7; b = 34 e r = 19; b = 33 e r = 31 .

**20 – Na divisão do inteiro 525 por um inteiro positivo o resto é 27. Achar os inteiros que podem ser o divisor e o quociente.**

**Solução:** Como o resto é 27, 525 – 27 = 498 é múltiplo do quociente e do divisor, sendo que o divisor é maior 27.  
Os divisores de 498 são: 1, 2,  3, 6, 83, 166, 249 e 498. Portanto, os possíveis valores do divisor são: 498, 249, 166 e 83. Nestes casos, os quocientes são, respectivamente: 1, 2, 3, e 6.  
Resposta: (divisor, quociente) = (498, 1), (249, 2), (166, 3), (83, 6).

**21 – Na divisão de dois inteiros positivos o quociente é 16 e o resto é o maior possível. Achar os dois inteiros, sabendo-se que sua soma é 341.**

**Solução:** Sejam A, o dividendo e B o quociente. Como o resto é o maior possível, esse resto é B – 1.  
Pelo algoritmo da divisão, temos: A = 16B + B – 1 è A = 17B – 1.  
Como A + B = 341,  podemos escrever 17B – 1 + B = 341 è 18 B = 342 è B = 19.  
O valor de A, é então:  341 – B = 341 – 19 = 322.  
Resposta: os dois números são 322 e 19.

**22 – Achar os inteiros positivos menores que 150 e que divididos por 39 deixam um resto igual ao quociente.**

**Solução:** Pelo algoritmo da divisão:  A = 39q + q è A = 40q è A é múltiplo de 40. Como deve ser menor que 150,  os possíveis valores desses inteiros positivos são: 40, 80 e 120.  
Resposta: 40, 80 e 120.

**23 – Seja d um divisor de n  (d | n). Mostrar que cd | n se e somente se c | (n/d).**

**Solução:**  
Como d | n  então existe q, tal que n = qd  ou n/d = q. (1)  
Se cd | n è n = cdq’ .  Usando a condição ( 1), conclui-se que   qd = cdq’ è  q = cq’  è n/d = cq’ è c | (n/d).  
De outro lado se c |(n/d) então n/d = cq è n = dcq è n = dc(q) è cd | n.  
Como de cd | n  è c | (n/d) e   c | (n/d) è cd | n, podemos concluir  cd | n    Û  c | (n/d)  ou cd | n se e somente se c | (n/d). Cqd.

**24 – Sejam n, r e s inteiros tais que 0 < r < n  e 0 < s < n. Mostrar que se n | (r – s) então r = s.**

**Solução:**  
Se   n > r e s > 0 então n + r > s è n > s - r  
Se   n > s e r > 0 então n + s > r è n > r – s.  
Como s – r = - (r – s), temos |(s – r)| = s – r ou r – s.  
Como n | (r – s) è n | |r – s| è nq = |r – s| è existe “q”  positivo ou nulo tal que nq  = |r – s| (1)  
Mas, nq = |r – s| < n è nq < n è q é negativo ou nulo (2).  
Como que não pode ser negativo e positivo, q somente pode ser nulo è |r – s| = nq = 0 è r – s = 0 è r = s. Cqd.

**25 – Mostrar que o produto de dois inteiros ímpares é um inteiro ímpar.**

**Solução:**  
Se a e b são ímpares, então a = 2k + 1 e b = 2k’ + 1.  
Assim,  a . b = (2k + 1)(2k’ + 1) = 4kk’ + 2k’ + 2k + 1 è a . b = 2(2kk’ + k’ + k) + 1 ou seja, a . b = 2q + 1 è a . b é ímpar. Cqd.

**26 – Demonstrar que se m e n são inteiros ímpares, então 8 | (m4 + n4 – 2).**

**Solução:** se m e n são ímpares, podemos escrever:  m = 2k + 1 e n = 2k’ + 1.  
Temos então:  
m4 + n4  - 2 = (2k + 1)4 + (2k’ + 1)4 – 2 = [(2k)4 + 4(2k)3 + 6(2k)2 + 4(2k) + 1] + [(2k’)4 + 4(2k')3 + 6(2k’)2 + 4(2k’)+1] – 2 = 16(k4 + k’4) + 32(k3 – k’3) + 24(k2 + k’2) + 8(k + k’) + 2 – 2 = 8[2(k4 + k’4) + 4(k3 – k’3) + 3(k2 + k’2) + (k + k’)].  
Como 2(k4 + k’4) + 4(k3 – k’3) + 3(k2 + k’2) + (k + k’)]. É um inteiro (multiplicação e adição de inteiros), podemos escrever: m4 + n4  - 2 = 8q, q inteiro è 8 | m4 + n4  - 2. Cqd.

**27 – Demonstrar que 30 | (n5 – n)**

**Solução:**  
n5 – n = n(n4 – n) = n(n2 – 1)(n2 + 1) = n(n + 1)(n –1)(n2 + 1).  
n(n + 1) é múltiplo de 2 conforme exercício 5, letra (a).   
Portanto: n(n + 1)(n + 2) (n2 + 1)  é múltiplo de 2.  
n(n + 1)(n – 1) é múltiplo de 3.  
Temos n = 3k ou n = 3k + 1 ou n = 3k + 2.  
Se n = 3k,  n é múltiplo de 3 è n(n + 1)(n – 1) é múltiplo de 3.  
Se n = 3k + 1,  n – 1 = 3k + 1 – 1 = 3k , n – 1 é múltiplo de 3 è n(n + 1)(n – 1) é múltiplo de 3.  
Se n = 3k + 2,  n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1) , n + 1 é múltiplo de 3 è n(n + 1)(n – 1) é múltiplo de 3.  
n(n + 1)(n – 1)(n2 + 1) é múltiplo de 5.  
Temos n = 5k, ou n = 5k + 1, ou n = 5k + 2 ou n = 5k + 3 ou n = 5k + 4.  
Se n = 5k, n é múltiplo de 5 è n(n + 1)(n – 1)(n2 + 1) é múltiplo de 5.  
Se n = 5k + 1,  n – 1 = 5k, n – 1 é múltiplo de 5 è n(n + 1)(n – 1)(n2 + 1) é múltiplo de 5.  
Se n = 5k + 2, n2 + 1 = 25k2 + 20k + 4 + 1 = 5(5k2 + 2k + 1) ⇒ n2 + 1 é múltiplo de 5 ⇒ n(n + 1)(n – 1)(n2 + 1) é múltiplo de 5.  
Se n = 5k + 3 , n2 + 1 = 25k2 + 30k + 9 + 1 = 5(5k2 + 6k + 2) ⇒ n2 + 1 é múltiplo de 5 è n(n + 1)(n – 1)(n2 + 1) é múltiplo de 5.  
Se n = 5k + 4, n + 1 = 5k + 4 + 1 = 5k + 5 = 5(5k + 1) ⇒ n + 1 é múltiplo de 5 è n(n + 1)(n – 1)(n2 + 1) é múltiplo de 5.  
Pelo visto acima, qualquer que seja n,  n (n + 1)(n – 1)( n2 + 1) = n5 - n é múltiplo de 2, de 3 e de 5. Portanto é também múltiplo de 2.3.5 = 30. Assim, 30 | (n5 – n). Cqd

**28 – Mostrar que, para todo inteiro n, existem inteiros k e r tais que  n = 3k + r e r = -1, 0, 1.**

**Solução:** Pelo algoritmo da divisão,  n = 3k ou n = 3k + 1 ou n = 3k + 2.  
Se n = 3k, r = 0.  
Se n = 3k  + 1,  è r = 1.  
Se n = 3k + 2,  podemos escrever   n = 3(k’ – 1) + 2 = 3k’ – 3 + 2 = 3k’ – 1 è r = -1.

**29 – Mostrar que  (1 + 2 + . . .  + n) | 3(12 + 22 + . . . + n2) para todo n > 1.**

**Solução:** De acordo com o exercício  nº 1, letra “a”, capítulo 2,  12 + 22 + . . . + n2 = (n/6)(n + 1)(2n + 1) ⇒ 3(12 + 22 + . . . + n2) = (1/2)(n)(n + 1)(2n + 1).   
Mas, (1/2)n(n + 1) = (1 + 2 + 3 + . . . + n).  
Assim, temos  3(12 + 22 + . . . + n2) = (1 + 2 + 3 + . . . + n)(2n + 1).   
Como (2n + 1)(1 + 2 + 3 + . . . + n)  |  3(12 + 22 + . . . + n2) Cqd.

**30 – Mostre que todo inteiro ímpar, quadrado perfeito, é da forma 4n + 1.**

**Solução:** n não pode ser par pois n2 seria da forma  (2k)2 = 4k2 que também é par.  
Portanto, n só pode ser impar para que seu quadrado seja ímpar.  
Assim, n  é da forma 2k + 1. Neste caso teremos n2 = (2k + 1) 2 = 4k2 + 4k + 1 = 4(k2 + k) + 1 o que permite concluir que n2 é da forma 4n + 1. Cqd.

**31 – Na divisão de 392 por 45, determinar:**

**(a) o maior inteiro que se pode somar ao dividendo sem alterar o quociente.**

**Solução:** 392 = 45.8 + 32. Como o maior resto possível é 44, pode-se somar 44 – 32 = 12.   
Resposta: 12

**(b) o maior inteiro que se pode subtrair ao dividendo sem alterar o quociente.**

**Solução:** o menor resto possível dessa divisão é zero. Portanto, pode-se subtrair 32.  
Resposta: 32.

**32 – Numa divisão de dois inteiros, o quociente é 16 e o resto 167. Determinar o maior inteiro que se pode somar ao dividendo e ao divisor sem alterar o quociente.**

**Solução:**Sejam “a”  o dividendo e “b”  o divisor.  Temos então: a = 16b + 167 è a – 167 = 16b  (1).  
O maior valor a ser somado à  “a”  e à  “b”   implicaria numa divisão com resto zero.  
Assim teremos a + x = 16(b + x) ⇒ a + x = 16b + 16x (2).  
De (1) e (2) podemos obter a + x = a – 167 + 16x è 15x = 167.   Como x deve ser inteiro, o maior valor de x é 11, pois 167 = 11.15 + 2. Portanto, o maior valor que pode ser somado é 11.  
Resposta: 11.

**33 – Achar o maior inteiro de quatro algarismos divisível por 13 e o menor inteiro  de cinco algarismos divisível por 15.**

**Solução:**  
**(1)**O maior inteiro de 9 algarismos é 9999. Como 9999 = 769.13 + 2, conclui-se que 9999 – 2 = 9997 é o maior número inteiro de quatro algarismos divisível por 13. Resposta: 9997

**(2)** O menor inteiro de 5 algarismos é 10000. Como 10000 = 666x15 + 10, resulta que 10000 + 5 = 666x15 + 15 ⇒ 10005 = 667 x 15. Portanto, o menor número de 5 algarismos divisível por 15 é 10005. Resposta: 10005.

**34 – Achar um inteiro de quatro algarismos, quadrado perfeito, divisível por 27 e terminado em 6.**

**Solução:**  Se a, b, c ... são fatores primos, os expoentes desses fatores devem ser pares para serem quadrados perfeitos.  
Como 27 = 33, deve-se ter pelo menos mais um 3 como fator. Portanto, o número deve ser múltiplo de 27 x 3 ou de 81. Para que o número termine em 6, devemos multiplicar 81 por um quadrado (pois 81 já é quadrado), terminado em 6 pois 81 termina em 1. Assim, temos as possibilidades 81 x 16 = 1296 e 81 x 36 = 2916.

Se o número tivesse 6 fatores iguais a 3, ele deveria ser múltiplo de 729. Para que terminasse em 6, deveriamos ter 729 x a, com a terminado em 4. Como os menores quadrados terminados em quatro são 4 e 64, teríamos 729 x 4 = 2916 e 729 x 64 = 46656 que tem 5 algarismos.

Para 8 fatores iguais a 3, o número deveria ser múltiplo de 6561 = 38. Para que o número terminasse em 6, deveriamos ter 6561 x a, com a terminado em 4. Como os menores quadrados terminados em quatro são 4 e 64, teríamos 6561 x 4 = 26244 que contém cinco algarismos.

Para 10 fatores iguais a 3, teríamos 310 > 10000, que terá mais de 4 algarismos.  
Portanto, os únicos números são 1296 e 2916. Resposta: 1296 e 2916.