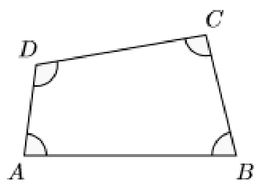
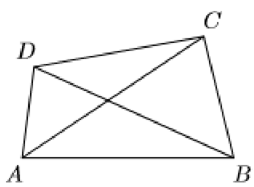
Quadriláteros

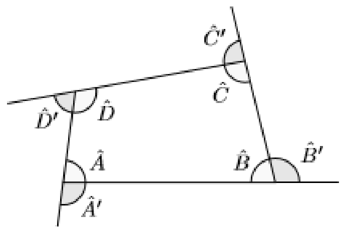
Nesta aula vamos estudar os quadriláteros e os seus elementos: lados, ângulos internos, ângulos externos, diagonais, etc. Além disso, vamos definir e observar algumas propriedades importantes de alguns quadriláteros particulares: quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e losangos.

Um quadrilátero é formado por quatro vértices A, B, C e D e por quatro lados que são os segmentos AB, BC, CD e DA tais que estes segmentos se encontram somente nos vértices, como está indicado na figura a seguir, e de modo que quaisquer três vértices não sejam pontos colineares.

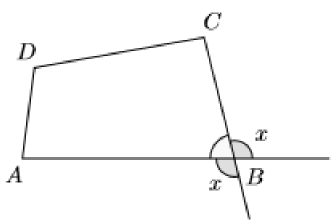


Os ângulos indicados na figura anterior são os ângulos internos do quadrilátero. Na figura a seguir, os segmento AC e BD são as diagonais e os ângulos suplementares dos ângulos internos são os ângulos externos do quadrilátero ABCD. Isto é, se $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ e $\angle D$ são os ângulos internos, então $\angle A0 = 180° - \angle A$, $\angle B0 = 180° - \angle B$, $\angle C0 = 180° - \angle C$ e $\angle D0 = 180° - \angle D$ são os ângulos externos.





Como no caso dos triângulos, em cada vértice, um ângulo externo de um quadrilátero é o ângulo formado por um lado e pelo prolongamento do outro lado do quadrilátero que chega neste vértice. Em cada vértice de um quadrilátero existem dois ângulos externos opostos pelo vértice. Na figura a seguir indicamos os dois ângulos externos x no vértice B do quadrilátero ABCD.



A respeito da soma dos ângulos internos e da soma dos ângulos externos de um quadrilátero, temos os seguintes resultados:

- A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°. De fato, desenhando uma diagonal que divide o quadrilátero em dois triângulos, vemos que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual a soma dos ângulos internos desses dois triângulos. Logo, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a $2 \times 180^\circ = 360^\circ$.

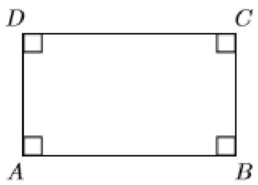
- Como no caso dos triângulos, a soma dos ângulos externos de um quadrilátero também é igual a 360°. De fato, utilizando a notação introduzida logo acima, a soma dos ângulos externos é igual a

$$\begin{aligned}\angle A' + \angle B' + \angle C' + \angle D' &= (180^\circ - \angle A) + (180^\circ - \angle B) + (180^\circ - \angle C) + (180^\circ - \angle D) \\ &= 4 \times 180^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) \\ &= 4 \times 180^\circ - 360^\circ = 2 \times 180^\circ = 360^\circ\end{aligned}$$

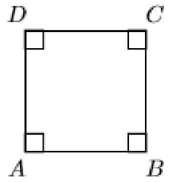
.

As definições e as propriedades enunciadas até aqui são válidas para quaisquer quadriláteros. Faremos agora um estudo de alguns quadriláteros especiais que possuem propriedades bem particulares, mas muito importantes para o estudo da Geometria. Após cada definição apresentamos uma ilustração do quadrilátero definido.

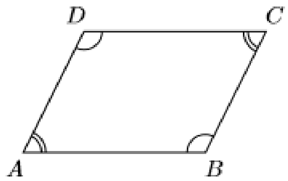
- **Retângulo:** É um quadrilátero com todos os ângulos retos. Dois lados opostos de um retângulo são paralelos e possuem o mesmo comprimento. Além disso, as diagonais de um retângulo possuem o mesmo comprimento e se encontram no ponto médio comum.



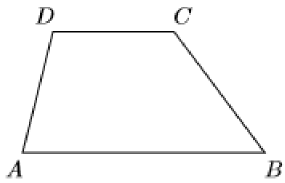
- **Quadrado:** É um retângulo com os quatro lados de mesmo comprimento.



- **Paralelogramo:** É um quadrilátero com lados opostos paralelos. Em um paralelogramo os lados opostos possuem o mesmo comprimento e dois ângulos opostos quaisquer possuem a mesma medida. Embora as diagonais de um paralelogramo possam ter comprimentos diferentes, elas se encontram no ponto médio comum.



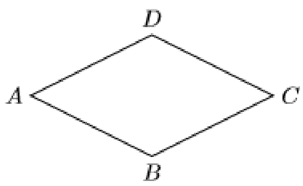
- **Trapézio:** É um quadrilátero com um par de lados opostos paralelos. Na figura a seguir, vemos um trapézio com os lados AB e CD paralelos.



- Losango: É um quadrilátero com os quatro lados de mesmo comprimento. Em um losango dois lados opostos são paralelos e possuem o mesmo comprimento. Dois ângulos opostos quaisquer de um losango possuem a mesma medida. As diagonais de um losango são perpendiculares e se encontram no ponto médio comum.

O **perímetro** de um triângulo é a soma dos comprimentos dos seus três lados. O perímetro de um quadrilátero é a soma dos comprimentos dos seus quatro lados. E de modo geral se temos uma figura com n lados, o perímetro desta figura é a soma dos comprimentos dos seus n lados, ou seja é o comprimento do contorno da figura.

Exemplo 1: (OBMEP 2008 - N2Q15) Numa folha quadrada de papel de 30 cm de lado, branca de um lado e cinza do outro, marcou-se um quadrado



ABCD em linhas pontilhadas, como na Figura 1. A folha foi dobrada ao longo das linhas pontilhadas e o resultado está mostrado na Figura 2, onde a parte cinza é um quadrado com 12 cm de lado. Qual é o comprimento do segmento PA?

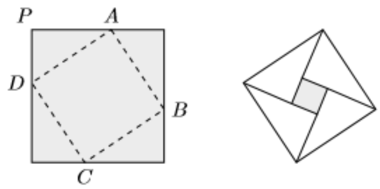
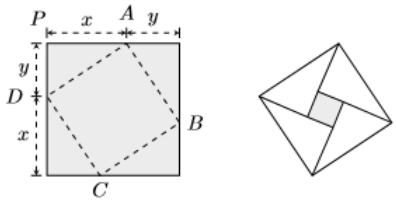


Figura 1 Figura 2

Solução: Sejam x e y as medidas (em centímetros) de PA e PD, respectivamente. Vemos então que $x + y = 30$ e que o lado do quadrado central da folha dobrada é $x - y$. Como este quadrado tem lado 12, segue que $x - y = 12$. Somando as equações $x + y = 30$ e $x - y = 12$ obtemos $(x + y) + (x - y) = 30 + 12 \Rightarrow 2x = 42 \Rightarrow x = 21$. Portanto, o segmento PA tem comprimento de 21 cm.



Exemplo 2: (OBMEP 2011 - N1Q5) Márcia cortou uma tira retangular de 2 cm de largura de cada um dos quatro lados de uma folha de papel medindo 12 cm por 20 cm. Qual é o perímetro do pedaço de papel que sobrou?

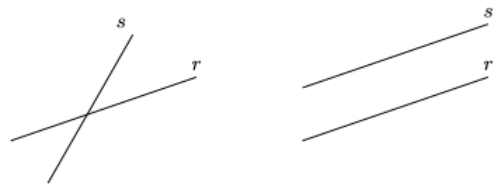
Solução. Cortar uma tira de dois centímetros de largura de cada lado da folha faz com que cada lado da folha passe a medir 4 cm a menos. Logo, o pedaço de papel que sobrou é um retângulo de dimensões $12-4 = 8cm$ e $20-4 = 16cm$, cujo perímetro é $8 + 8 + 16 + 16 = 48cm$.

Exemplo 3. Para verificar se um pedaço de pano é quadrado, um alfaiate dobra ele ao longo de cada uma das suas diagonais e verifica se as arestas coincidem. Basta fazer isso?

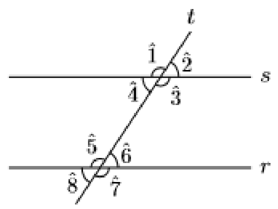
Solução: Não. Podemos pegar qualquer losango que não seja um quadrado. Ao dobrá-lo ao longo de qualquer diagonal, suas arestas coincidirão.

Retas paralelas cortadas por uma transversal

Por dois pontos distintos no plano passa uma e somente uma reta. Deste modo, dadas duas retas distintas no plano, ou elas possuem um único ponto em comum, ou elas não possuem ponto em comum. No primeiro caso elas são chamadas de concorrentes e no segundo caso elas são paralelas. Na figura a seguir vemos, respectivamente duas retas concorrentes e duas retas paralelas r e s.



Agora vamos considerar duas retas no plano, como as retas r e s representadas na figura anterior à direita. Analisando uma figura como esta, se nada foi dito previamente sobre as retas r e s, podemos concluir que as retas r e s são paralelas? Pense sobre isso e observe que como as retas são infinitas e vemos apenas uma pequena parte delas, então é impossível concluir se elas são paralelas ou concorrentes através da análise de uma ilustração. Para decidir sobre qual é a posição relativa de r e s é necessário obter alguma informação geométrica mais precisa. Uma maneira de fazer isso é traçar uma reta t transversal às retas r e s. Na figura a seguir vemos exatamente esta situação, onde estão ilustradas duas retas r e s ambas cortadas por uma reta transversal t.



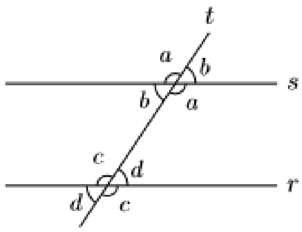
Para caracterizar o paralelismo das retas r e s, vamos comparar os ângulos formados pelas retas r e t com os ângulos formados pelas retas s e t. Para a comparação de dois desses ângulos, dependendo se eles estão de um mesmo lado da transversal t e dependendo se eles estão entre as retas r e s (interior) ou se eles não estão entre as retas r e s (exterior) é utilizada a seguinte nomenclatura.

- Os ângulos 2 e 6 são correspondentes.

- Os ângulos 3 e 5 são alternos internos.
- Os ângulos 1 e 7 são alternos externos.
- Os ângulos 3 e 6 são colaterais internos.
- Os ângulos 2 e 7 são colaterais externos.

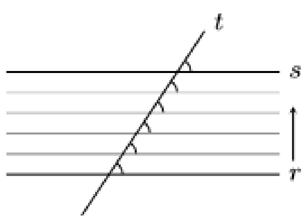
Nesta figura existem outros pares de ângulos correspondentes, alternos internos, alternos externos, etc. O que importa é a posição relativa dos dois ângulos analisados. Por exemplo, os ângulos 4 e 8 são correspondentes, pois ambos estão de um mesmo lado da reta t e ambos estão abaixo das retas r e s. Já os ângulos 4 e 6 são alternos internos, pois cada um deles está de um lado da reta t e ambos estão entre as retas r e s.

Como ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida, de fato, na figura anterior podem aparecer apenas 4 ângulos diferentes, indicados com as letras a, b, c e d na figura a seguir.



Vamos analisar agora o paralelismo das retas r e s em termos destes ângulos a, b, c e d.

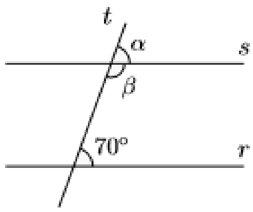
Movendo paralelamente uma reta r ao longo de uma reta transversal t, vemos que os ângulos que r formam com t não se modificam ao longo deste movimento. Assim se r e s são retas paralelas cortadas por uma reta transversal t, então os ângulos entre r e t são iguais aos respectivos ângulos entre s e t. Logo, ângulos correspondentes são iguais, ˆangulos alternos internos s˜ao iguais e assim por diante. Além disso, por outro lado, podemos mostrar que, quando os ângulos entre r e t possuem as mesmas medidas dos respectivos ângulos entre as retas s e t, então as retas r e s são paralelas. Deste modo, em relação a figura anterior, dizer que as retas r e s são paralelas é o mesmo que dizer que $a = c$ e $b = d$.

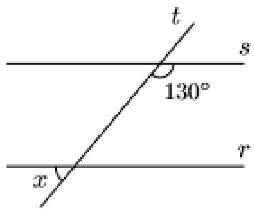


Resumindo, podemos enunciar o seguinte resultado que caracteriza quando duas retas são paralelas através da comparação dos ângulos formados por estas retas e uma terceira reta transversal.

Teorema: *No plano sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal t. As retas r e s são paralelas quando elas determinam com a reta t ângulos correspondentes (ou ângulos alternos internos) de mesma medida.*

Exemplo 4: Em cada uma das figuras a seguir, observando os ângulos entre as retas paralelas r e s com a transversal t, calcule as medidas dos ângulos indicados por letras.

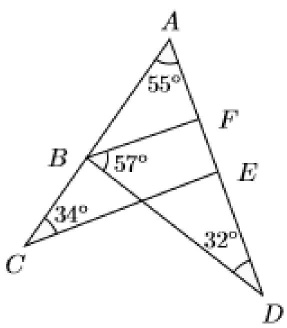




Solução. Na figura da esquerda os ângulos $70°$ e α são ângulos correspondentes. Como as retas r e s são paralelas, estes ângulos possuem a mesma medida e assim $\alpha = 70°$. Agora observe que os ângulos α e β são ângulos suplementares. Daí $\beta = 180° - \alpha = 180° - 70° = 110°$. Nesta figura os ângulos $70°$ e β são ângulos colaterais internos. Observe que na solução deste exercício mostramos que ângulos colaterais internos de retas paralelas cortadas por uma transversal são ângulos suplementares.

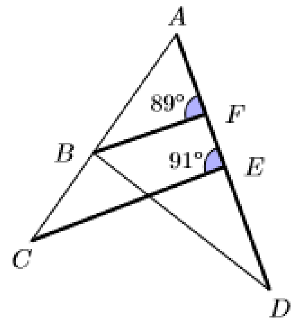
Para a outra figura observe, à esquerda do ângulo de $130°$, o seu ângulo suplementar $50° = 180° - 130°$. Os ângulos $50°$ e x são ângulos correspondentes. Daí, como as retas r e s são paralelas e neste caso ângulos correspondentes possuem a mesma medida, podemos concluir que $x = 50°$.

Exemplo 5: Na figura a seguir, os pontos A, F, E e D estão alinhados assim como os pontos A, B e C também estão alinhados. As retas CE e BF são paralelas?

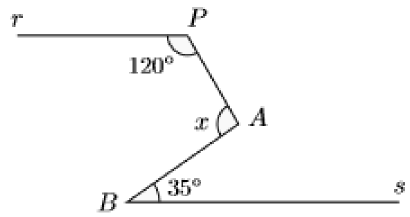


Solução. No triângulo BFD vemos que $\angle BFD = 180° - (57° - 32°) = 91°$.

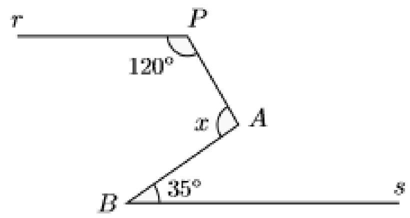
Daí segue que $\angle BFA = 180° - 91° = 89°$. E n triângulo CEA vemos que $\angle CEA = 180° - (34° + 55°) = 91°$. Como as retas CE e BF possuem ângulos correspondentes $\angle BFA = 89°$ e $\angle CEA = 91°$ diferentes quando cortadas pela transversal AD, segue que elas não são retas paralelas.



Exemplo 6: Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Qual é a medida do ângulo x?

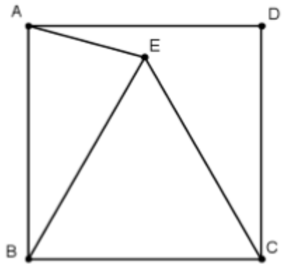


Solução. Prolongue o segmento PA até ele encontrar a reta s em um ponto C. Como as retas r e s são paralelas, podemos identificar os dois ângulos alternos internos de 120° indicados na figura a seguir.



Olhando o ângulo raso no vértice C, concluímos que $\angle ACB = 60°$, pois este é o suplementar do ângulo adjacente de 120°. No triângulo ABC, x é ângulo externo não adjacente aos ângulos internos de 35° e de 60°. Daí $x = 35° + 60° = 95°$.

Exemplo 7. Determine a medida do ângulo AÊB no quadrado ABCD abaixo, sabendo que o triângulo BCE é equilátero.



Solução: Se $\angle EBC = 60°$, pois $\triangle BCE$ é equilátero, então $\angle ABE = 30°$, pois ABCD é quadrado. Além disso, $BE = BC$ e $BC = AB$, ou seja, $\triangle ABE$ é isósceles, sendo que $\angle BAE = \angle AEB$. Temos então, por $\triangle ABE$, $2\angle AEB + 30° = 180°$, segue que $\angle AEB = 75°$.