Soluções das Questões – 2º SIMULADO – Nível 1

QUESTÃO 1

a) O número-parada de 93 é 4, pois $93 \to 9 \times 3 = 27 \to 2 \times 7 = 14 \to 1 \times 4 = 4$.

b) Escrevendo $3 \times 2 = 6$ vemos que $32 \to 3 \times 2 = 6$. Como $32 = 4 \times 2 \times 2 \times 2$, temos
$4222 \to 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \to 3 \times 2 = 6$
e assim o número-parada de 4222 é 6, bem como de 2422, 2242 e 2224.

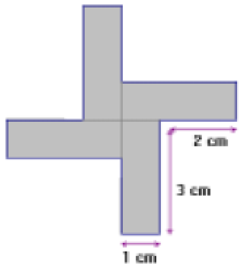
Outra alternativa é escrever $1 \times 6 = 6$, o que nos dá $16 \to 1 \times 6 = 6$; como $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ segue que
$2222 \to 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \to 1 \times 6 = 6$
e vemos que o número-parada de 2222 também é 6.

Pode-se também pensar a partir de $48 \to 4 \times 8 = 32 \to 3 \times 2 = 6$; como $48 = 4 \times 12 = 4 \times 2 \times 2 \times 3$ vemos que 2234, 2324,..., 4322 também possuem 6 como número-parada.

c) Há apenas duas maneiras de obter 2 multiplicando dois algarismos, a saber, $12 \to 1 \times 2 = 2$ e $21 \to 2 \times 1 = 2$. Para obter 12, temos as possibilidades $26 \to 2 \times 6 = 12$, $62 \to 6 \times 2 = 12$, $34 \to 3 \times 4 = 12$ e $43 \to 4 \times 3 = 12$; para obter 21, temos as possibilidades $37 \to 3 \times 7 = 21$ e $73 \to 7 \times 3 = 21$. Como os números 21, 26, 62, 34, 43, 37 e 73 não podem ser obtidos como produto de dois algarismos, concluímos que os números de dois algarismos cujo número-parada é 2 são 12, 21, 26, 62, 34, 43, 37 e 73.

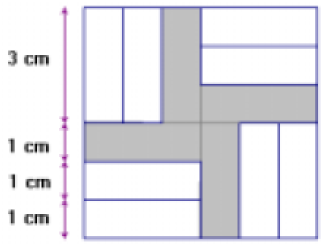
QUESTÃO 2

A) *Solução 1:* Ao juntar os retângulos, cada um "perdeu" um lado de 1 cm e mais 1 cm em um lado de comprimento 3 cm, ou seja, 2 cm no total. Como o perímetro de cada retângulo é 8 cm, o perímetro da figura é $4 \times 8 - 4 \times 2 = 24$ cm.



Solução 2: A figura tem 4 lados de 3 cm, 4 lados de 2 cm e 4 lados de 1 cm, logo seu perímetro é $4 \times 3 + 4 \times 2 + 4 \times 1 = 24$ cm.

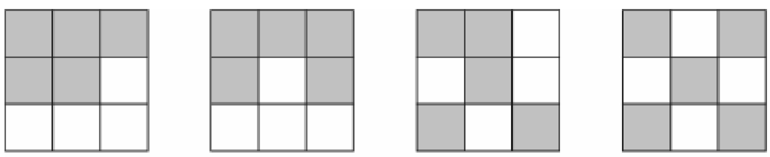
B) A resposta está na figura ao lado, onde vemos que basta juntar 8 retângulos à figura original para formar o quadrado.



C) *Solução 1*: Cada retângulo tem área igual a $3 \times 1 = 3$ cm^2. Como o quadrado é composto de 12 retângulos, a sua área é igual a $12 \times 3 = 36$ cm^2.

Solução 2: Observando a figura, vemos que cada lado do quadrado tem comprimento igual a $3 \times 1 + 3 = 6$ cm. Portanto, sua área é $6 \times 6 = 36$ cm^2.

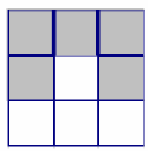
QUESTÃO 3 (a) Mostramos a seguir uma figura para cada perímetro. Há várias possibilidades para os três primeiros casos, mas a de perímetro 20 cm é a única.



perímetro 10 cm   perímetro 12 cm   perímetro 16 cm   perímetro 20 cm

(b) Cada quadradinho tem perímetro 4 cm. A soma dos perímetros de 5 quadradinhos é igual a $4 \times 5 = 20$ cm, logo o perímetro de uma figura não pode ser maior que 20 cm. Como o item anterior mostra que há uma figura de perímetro 20 cm, segue que o perímetro máximo de uma figura é 20 cm.

(c) *1ª solução:* Cinco quadradinhos sem lados comuns têm um perímetro total de $5 \times 4 = 20$ cm. Cada lado comum entre dois quadradinhos subtrai 2 cm desse total, pois esses dois lados (um de cada quadradinho) não são mais contados no cálculo do perímetro. Por exemplo, na figura ao lado existem quatro lados comuns a dois quadrados (marcados em traço mais grosso), logo seu perímetro é $20 - 4 \times 2 = 12$ cm.



Em geral, o perímetro de uma figura formada por 5 quadradinhos é
$20 - 2 \times (\text{número de lados comuns entre os quadradinhos})$ cm. Esse número é a diferença entre dois números pares, logo é par.

2ª solução: Essa solução é parecida com a primeira, só que aqui construímos uma figura quadradinho a quadradinho. O primeiro quadradinho tem perímetro 4 cm. Ao adicionar o segundo quadradinho o perímetro passa a ser

$$8 - 2 \times (\text{número de lados comuns entre os quadradinhos})\text{ cm}$$

que é um número par. Ao adicionar o terceiro quadradinho o perímetro passa a ser

$$12 - 2 \times (\text{número de lados comuns entre os quadradinhos})\text{ cm}$$

que também é um número par, e assim por diante até chegarmos aos cinco quadradinhos.

QUESTÃO 4

a) Aqui estão três soluções, entre outras:

$$123456 \xrightarrow{\text{inverte}} \boxed{65432}1 \xrightarrow{\text{troca}} 1\boxed{65432}$$
$$\boxed{1}23456 \xrightarrow{\text{troca}} 23456\boxed{1} \xrightarrow{\text{inverte}} 165432$$
$$\boxed{12}3456 \xrightarrow{\text{troca}} 3456\boxed{12} \xrightarrow{\text{inverte}} \boxed{2}16543 \xrightarrow{\text{troca}} 16543\boxed{2}$$

b) Existem 5 números diferentes formados com os algarismos 1, 2 e 3, além de 123. Eles são 132, 213, 231, 312 e 321. Vamos mostrar como obter todos a partir de 123:

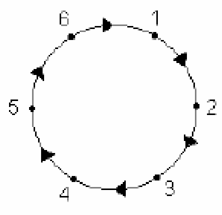
$$\boxed{1}23 \xrightarrow{\text{troca}} 23\boxed{1} \xrightarrow{\text{inverte}} 132$$
$$123 \xrightarrow{\text{inverte}} \boxed{3}21 \xrightarrow{\text{troca}} 21\boxed{3}$$
$$\boxed{1}23 \xrightarrow{\text{troca}} 23\boxed{1}$$
$$\boxed{12}3 \xrightarrow{\text{troca}} 3\boxed{12}$$
$$123 \xrightarrow{\text{inverte}} 321$$

Pode-se também obter todos estes números através de uma única seqüência de *troca* e *inverte* ; por exemplo,

$$12\boxed{3} \xrightarrow{\text{troca}} 31\boxed{2} \xrightarrow{\text{troca}} \boxed{2}31 \xrightarrow{\text{inverte}} 13\boxed{2} \xrightarrow{\text{troca}} 21\boxed{3} \xrightarrow{\text{troca}} \boxed{3}21$$

c) Em um número qualquer formado com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, temos os algarismos das "pontas" e os do "meio"; por exemplo, em 621354 os algarismos das pontas são 6 e 4 e os algarismos 2, 1, 3, e 5 estão no meio. Dizemos também que dois algarismos são *vizinhos* se um está ao lado do outro; no exemplo em questão, (2,1) e (3,5) são dois pares de vizinhos.

O movimento *inverte* troca os algarismos das pontas e mantém os vizinhos juntos. O movimento *troca* faz com que as pontas se tornem vizinhos e separa um par de vizinhos, fazendo com que eles se tornem pontas. Logo, começando com 123456, vemos que qualquer seqüência de movimento *troca* e *inverte* tem como resultado um número em que 1 e 6 são ou pontas ou vizinhos; como isso não acontece com 243156, é impossível transformar 123456 em 243156 com esses movimentos.



Alternativamente, podemos pensar nos algarismos do número 123456 escritos ao longo de um círculo orientado no sentido horário, como na figura ao lado. O movimento *inverte* muda o sentido de rotação deste ciclo e o movimento *troca* mantém este sentido; por outro lado, algarismos vizinhos, em particular o 1 e o 6, permanecem sempre vizinhos após qualquer destes movimentos. Como em 243156 o 1 e o 6 não são vizinhos, concluímos que é impossível transformar 123456 em 243156 com esses movimentos.

QUESTÃO 5

a) Como sobrou o cartão de número 7 e Ana e Cristina só tiraram cartões ímpares, seus cartões foram 1, 3, 5 e 9; logo, a soma de seus pontos foi $1+3+5+9=18$. Beatriz e Diana tiram os cartões 2, 4, 6 e 8, cuja soma é $2+4+6+8=20$; podemos também ver este total como

$$\underbrace{45}_{\text{total dos cartões}} - \underbrace{18}_{\text{pontos de Ana e Cristina}} - \underbrace{7}_{\text{carta que ficou na mesa}} = 20.$$

Logo Beatriz e Diana ganharam por 20 a 18.

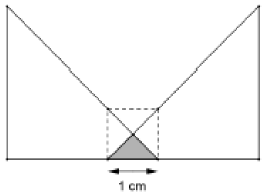
b) A soma dos valores de todos os cartões é $1+2+\cdots+9=45$; se o 8 fica na mesa então, para que a partida termine empatada, $45-8=37$ (ou então $1+2+3+4+5+6+7+9=37$) pontos devem ser divididos igualmente pelas duas duplas, o que é impossível pois 37 é um número ímpar. Mais geralmente, se sobra um cartão de número par na mesa, a soma dos pontos das duplas é $45 - \textit{número par} = \textit{número ímpar}$, e não pode haver empate neste caso.

c) Quando sobra o cartão de número 5, a soma dos pontos das duplas é $45-5=40$, que é um número par. Se nesse caso uma partida termina empatada, cada dupla deve ter feito $\frac{40}{2}=20$ pontos. Para argumentar que o empate pode realmente acontecer nessa situação, é necessário exibir uma partida que termine empatada em 20 a 20; um exemplo é quando uma dupla retira os cartões de números 1, 2, 8 e 9 e a outra retira os restantes.

d) *1ª solução:* O cartão com menor número que pode sobrar é 1 e o maior é 9. Logo, a soma dos pontos feitos pelas duas duplas varia de $45-9=36$ a $45-1=44$, ou seja, os pontos das meninas são quatro números consecutivos cuja soma está entre 36 e 44. As possibilidades {1,2,3,4}, {2,3,4,5}, {3,4,5,6}, {4,5,6,7}, {5,6,7,8}, {6,7,8,9} e {7,8,9,10} não servem pois, em qualquer delas, a soma dos números é menor que 36. Analogamente {10,11,12,13}, {11,12,13,14}, {12,13,14,15}, {13,14,15,16} e {14, 15, 16, 17} não servem pois, em qualquer caso, a soma dos números é maior que 44.

Restam as possibilidades {8,9,10,11} e {9,10,11,12}. No primeiro caso, o cartão que ficou na mesa é o de número $45-(8+9+10+11)=7$ e no segundo é o de número $45-(9+10+11+12)=3$. Como o cartão que ficou na mesa não foi o de número 3, só resta a primeira possibilidade; concluímos que Ana fez 8 pontos, Beatriz fez 9, Cristina fez 10 e Diana fez 11. A dupla que venceu foi Beatriz e Diana, com $9+11=20$ pontos contra $8+10=18$ de Ana e Cristina.

2ª solução (com um pouco de álgebra, que pode estar fora do alcance de alunos do nível 1): Se x é a pontuação de Ana, então $x+1$, $x+2$ e $x+3$ são as pontuações de Beatriz, Cristina e Diana, respectivamente. Logo a soma dos pontos das duas duplas é $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=4x+6$, que como vimos no parágrafo anterior é no mínimo 36 e no máximo 44. Logo $36 \le 4x+6 \le 44$, ou seja, $30 \le 4x \le 38$ e concluímos que $7{,}5 \le x \le 9{,}5$. Logo $x=8$ ou $x=9$ são os possíveis números de



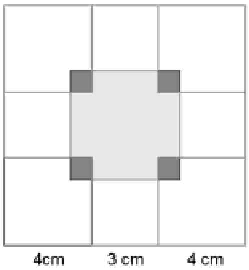
QUESTÃO 6

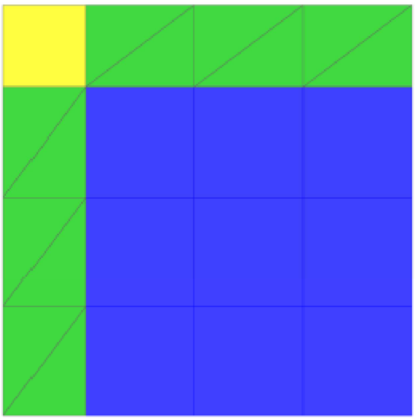
Cada uma das peças amarelas tem área $3\times 3=9$ cm^2, as azuis têm $4\times 4=16$ cm^2 e as verdes têm $\frac{3\times 4}{2}=6$ cm^2.

a) O hexágono montado por Dafne compõe-se de duas peças verdes, uma amarela e uma azul. Portanto, sua área é igual a $2\times 6+9+16=37$ cm^2.

b) A figura construída forma um quadrado de lado $4+3+4=11$ cm, cuja área é $11\times 11=121$ cm^2. Ele é composto de 4 amarelas e 4 peças azuis; a área total dessas peças é $4\times 9+4\times 16=100$ cm^2. A área do buraco é a área do quadrado menos a soma das áreas dessas peças, ou seja, é igual a $121-100=21$ cm^2.

Alternativamente, podemos pensar no buraco (em cinza claro) como um quadrado de 5 cm de lado do qual foram retirados, nos cantos, quadradinhos de lado 1 cm (em cinza escuro); sua área é então $5\times 5-4\times 1\times 1=21$ cm^2.





c) Uma possível maneira de preencher o quadrado 15×15, como pedido, é mostrado na figura ao lado.

d) Um quadrado de lado 15 cm tem $15\times 15=225$ cm^2; observamos que 225 é um número ímpar. A peça azul tem área 16 cm^2 e a verde tem área 6 cm^2, ambos números pares. Logo não é possível preencher o quadrado de lado 15 cm apenas com peças desse tipo, pois a soma de números pares é par. Segue que para preencher o quadrado de lado 15 cm com as peças do enunciado é necessário usar pelo menos uma peça amarela.