Aula 3 – 4º Encontro

Critérios de Congruência de triângulos

15/10/2016

Critérios de Congruência de triângulos

Dois triângulos são congruentes se seus lados e seus ângulos são iguais, isto é, de mesma medida.

Casos de Congruência de triângulos:

1º Caso: LAL: neste caso teremos dois lados congruentes e o ângulo formado por eles também será congruente.
2º Caso: LLL: aqui os três lados são congruentes.
3º Caso: ALA: temos dois ângulos congruentes e o lado compreendido entre eles é congruente.
4º Caso: LAAo: um lado congruente, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado é congruente.

1. (Círculo Matemático Moscou – pág.18, Problema 8.9) Existem triângulos que podem ser divididos em:

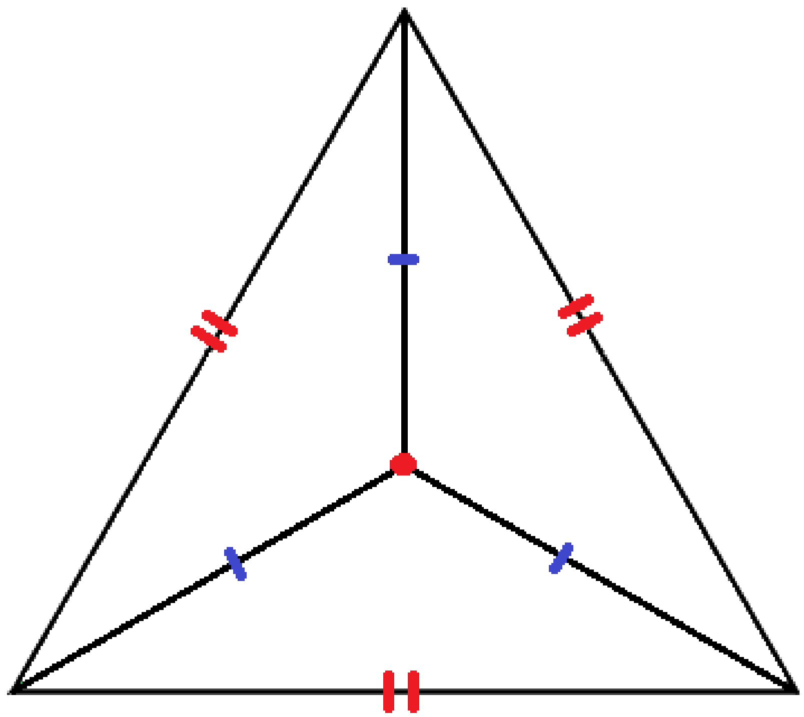
a) Três triângulos congruentes;

b) Quatro triângulos congruentes;

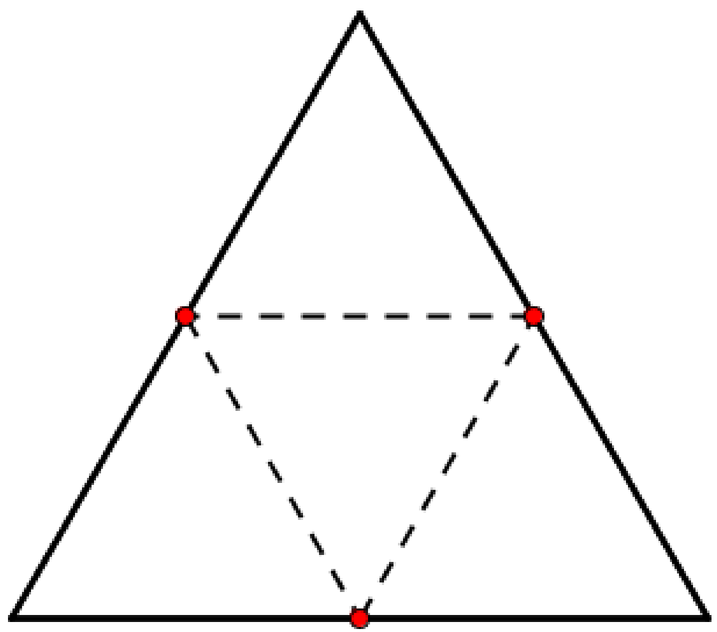
c) Cinco triângulos congruentes.

1)

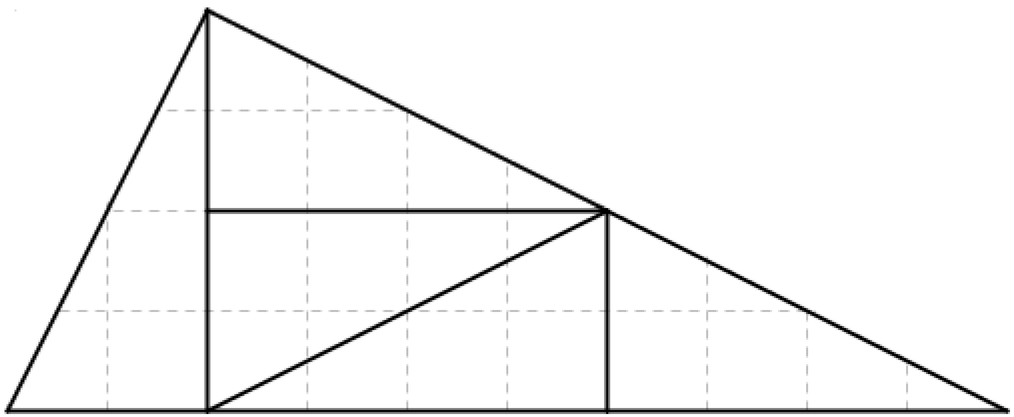
a) Observe que ao traçarmos as bissetrizes de um triângulo equilátero, o ponto de encontro (incentro) formará 3 triângulos de mesma base e mesmos lados, isto é, congruentes.



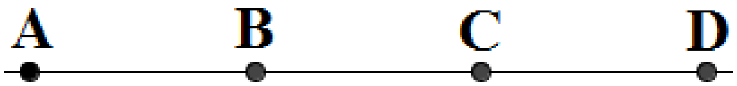
b) Observe que ao encontrarmos os pontos médios de um triângulo equilátero podemos formar 4 triângulos de lados iguais, isto é, congruentes.



c) Observe que neste caso, temos 5 triângulos de lados congruentes.



2. (Portal da Matemática, Congruência de Triângulos e Aplicações, Exercício 1) Dados quatro pontos distintos A, B, C e D, todos sobre uma mesma reta como indica a figura abaixo, determine o número de segmentos distintos que podem ser formados com vértices em tais pontos.



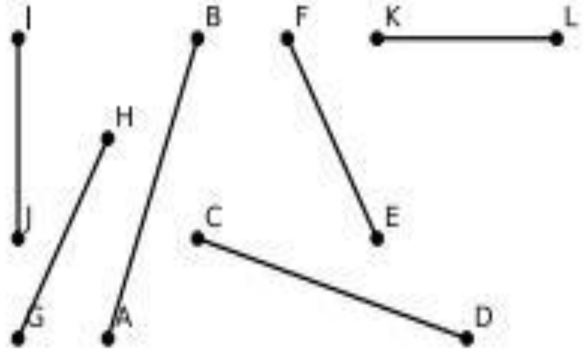
2)

Observe que temos os seguintes segmentos:

$$AB, AC, AD, BC, BD \text{ e } CD$$

Isto é, podemos formar 6 segmentos.

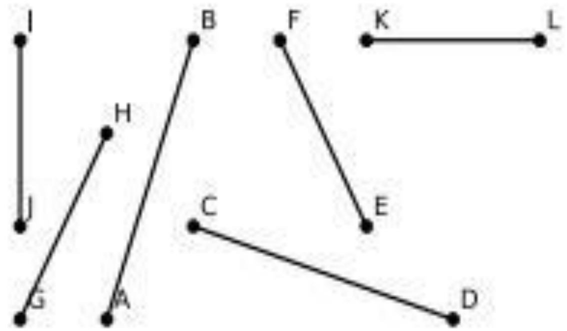
3. (Portal da Matemática, Congruência de Triângulos e Aplicações, Exercício 2) Usando o compasso, determine na figura abaixo quais segmentos são congruentes.



3)

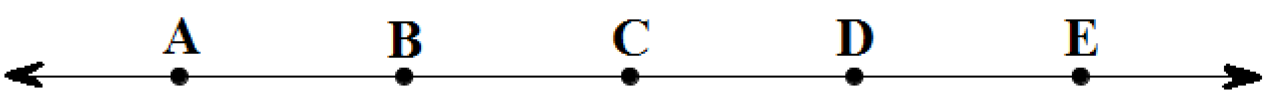
A única forma de resolver este exercício é utilizando compasso e régua.

Assim temos,



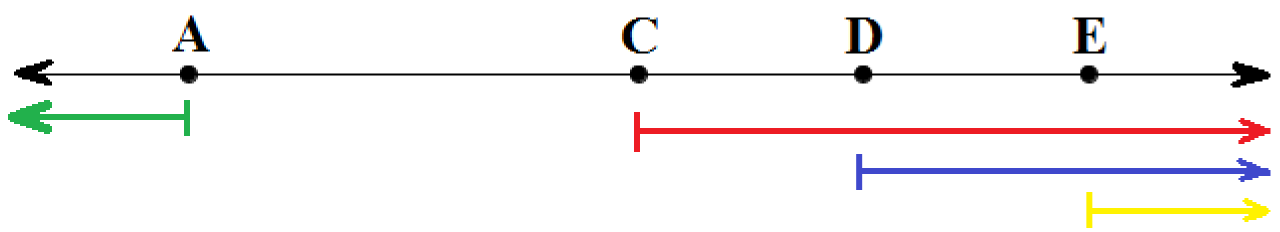
$$IJ = KL$$
$$GH = FE$$
$$e\ AB = CD$$

4. (Portal da Matemática, Congruência de Triângulos e Aplicações, Exercício 5) Abaixo estão representados cinco pontos distintos sobre uma mesma reta. Quantas semirretas possuem origem em algum desses cinco pontos e não contêm o vértice B?



4)

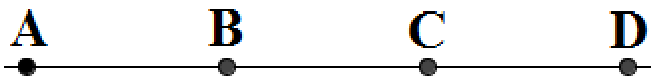
Com a exceção do ponto B, por qualquer um dos outros pontos, existe exatamente uma semirreta que satisfaz a condição do enunciado.



Portanto, existem 4 semirretas.

5. (Portal da Matemática, Congruência de Triângulos e Aplicações, Exercício 8) Existem quatro pontos consecutivos A, B, C e D sobre uma reta. Se $AD = 2BC$ e $AB + CD = 20$, determine o valor de AD.

5)



Temos

$$AB + CD = 20 \qquad (1)$$

Observe que

$$AD = AB + BC + CD \underset{(1)}{\Longrightarrow} AD = BC + 20 \qquad (2)$$

Como

$$AD = 2BC \qquad (3)$$

Igualando as equações (2) e (3), temos:

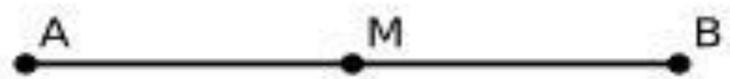
$$2BC = BC + 20 \Rightarrow 2BC - BC = 20$$

$$\Rightarrow BC = 20$$

Logo,

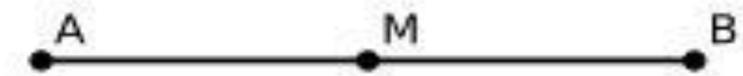
$$AD = 2 \cdot 20 = 40$$

6. (Portal da Matemática, Congruência de Triângulos e Aplicações, Exercício 9) Seja M o ponto médio de AB. Se $AM = 7x - 1$ e $MB = x + 11$, encontre o valor de x.



6)

Como M é ponto médio, temos que $AM = MB$.



Isto é,

$$7x - 1 = x + 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x - x = 11 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2$$

7. (Portal da Matemática, Congruência de Triângulos e Aplicações, Exercício 14) No desenho abaixo, C é o ponto médio de AB e E é o ponto médio de CD. Sabendo que $AB + ED - AC = 30cm$, determine o comprimento de AE.

7)

Como C é ponto médio de AB, então $AC = CB$, e ainda, $AB = 2AC$ (1)

Como E é ponto médio de CD, então $CE = ED$ (2)

Temos

$$AB + ED - AC = 30cm \Rightarrow$$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} 2AC + ED - AC = 30cm \Rightarrow$$

$$\underset{(2)}{\Rightarrow} AC + CE = 30cm$$

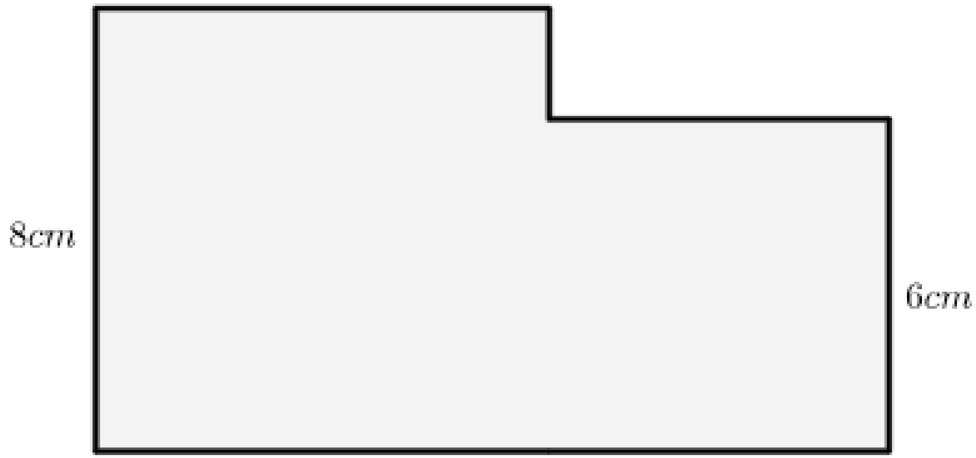
Observe que $CE = CB + BE$

Então,

$$AC + CB + BE = 30cm$$

Isto é, $$AE = 30cm$$

8. (OBMEP – Banco de Questões 2016 Exercício 24, pág.19) A figura a seguir mostra uma “escadinha” formada por dois quadrados, um de lado 8cm e um de lado 6cm. A tarefa é cortar a figura em três pedaços e reagrupá-los para formar um quadrado sem buracos.



a) Qual o lado do quadrado que deverá ser formado no final?

b) Utilizando apenas um lápis, uma régua de 20cm, com marcações de 1cm em 1cm, e uma tesoura que corta apenas seguindo uma linha reta, mostre como realizar a tarefa desejada.

8)

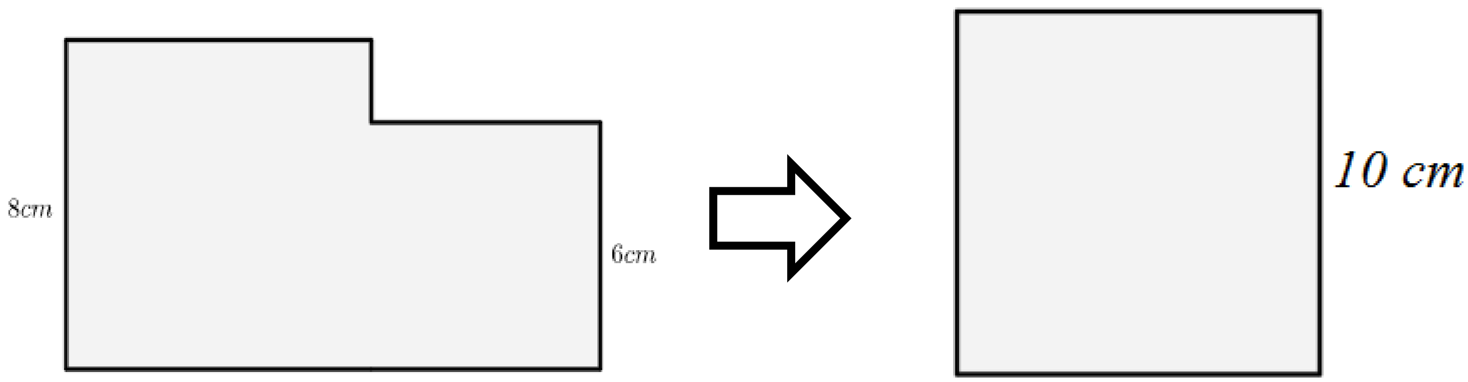
a) Como o quadrado não deve ter buracos, a área final deve ser igual à área original. Se chamarmos de L o lado do quadrado, temos:

$$L^2 = 8^2 + 6^2$$

$$L^2 = 64 + 36$$

$$L^2 = 100$$

$$L = 10$$

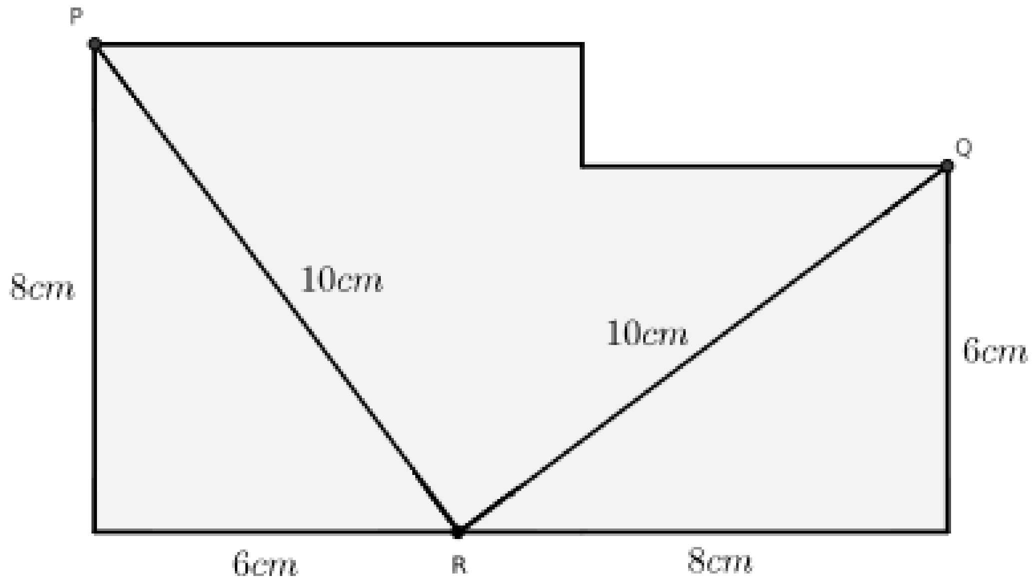


8)

b) Pelo Teorema de Pitágoras, 8, 6 e 10 são lados de um triângulo retângulo, pois

$$8^2 + 6^2 = 10^2$$

Tomando o lado maior da figura, que possui comprimento $8 + 6 = 14$, marque o ponto R que o divide em pedaços de tamanhos 6 e 8.

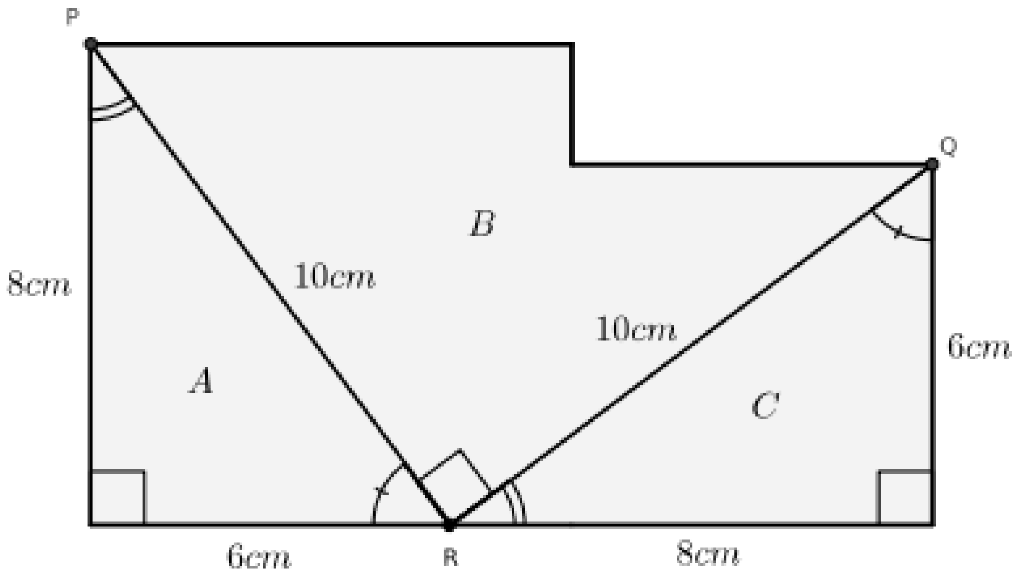


Trace os segmentos deste ponto para os extremos opostos esquerdo e direito, denotados por P e Q, como na figura a seguir.

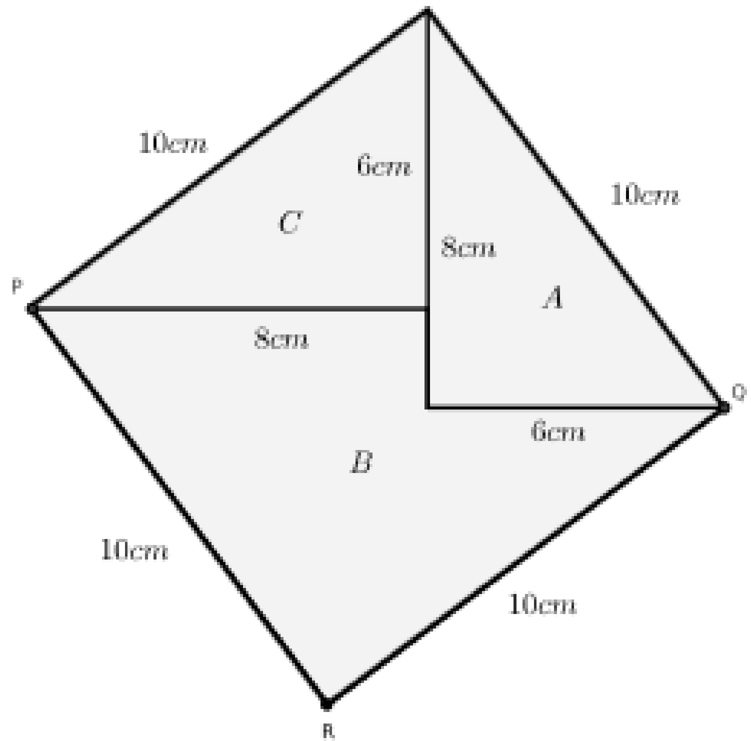
Usando o Teorema de Pitágoras, temos $PR = QR = 10$.

Estes segmentos separam a figura nos pedaços A, B e C.

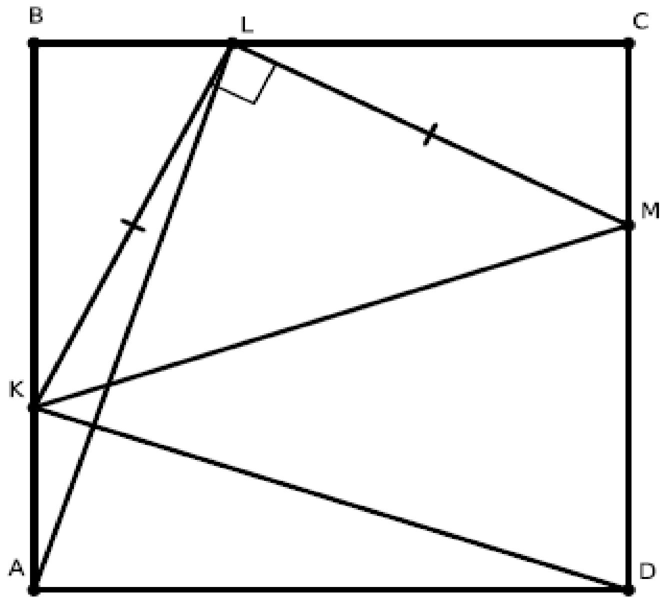
Os pedaços A e C são triângulos congruentes e, usando as somas de seus ângulos internos, podemos concluir que $PRQ = 90°$.

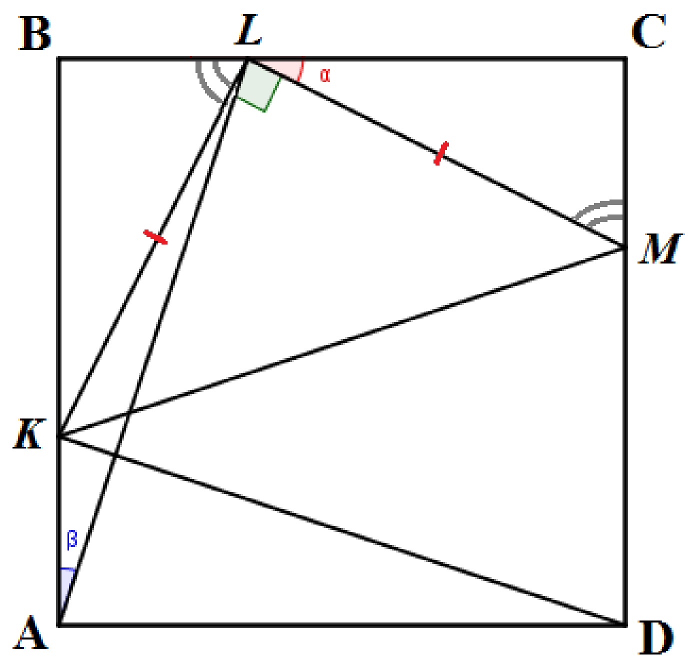


Com a tesoura, a figura é separada nos pedaços A, B e C. Em seguida, eles são realocados para formar o quadrado de lado 10 da figura a seguir:



9. (OBMEP – Banco de Questões 2015 Exercício 27, pág.56) Segmentos perpendiculares Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e os pontos K, L e M estão sobre os lados AB, BC e CD de modo que ΔKLM é um triângulo isósceles retângulo em L. Prove que AL e DK são perpendiculares.





9) Observe que $< BLK = 90° - \alpha$ e $< LMC = 90 - \alpha$, isto é, são iguais.

Logo,

$$\Delta KLB \equiv \Delta LMC \begin{cases} < BLK =< LMC \\ KL = LM \\ < LBK =< MCL \end{cases}$$

pelo caso de congruência ALA.

Assim, $BL = CM$ e $BK = LC$ $\qquad (*)$

Temos,

$$\begin{cases} AB = AK + BK \\ BC = BL + LC \end{cases}$$

Como $ABCD$ é um quadrado, temos que seus lados são de mesma medida, isto é, $AB = BC$

Logo,

$$AK + \cancel{BK} = BL + \cancel{LC} \underset{(*)}{\Rightarrow} AK = BL$$

Agora observe os triângulos ABL e KAD

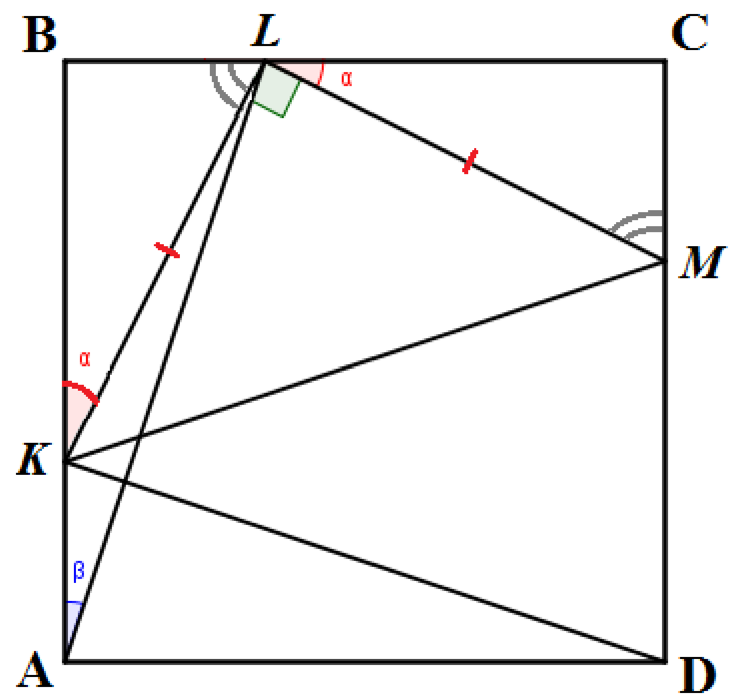
Temos,

$$\Delta ABL \equiv \Delta KAD \begin{cases} AB = AD \\ < ABL =< KAD \\ BL = AK \end{cases}$$

Pelo caso de congruência LAL

Consequentemente,

$$< BAL =< ADK = \beta$$



Translandando as retas AL e DK

Para o canto direito do quadrado

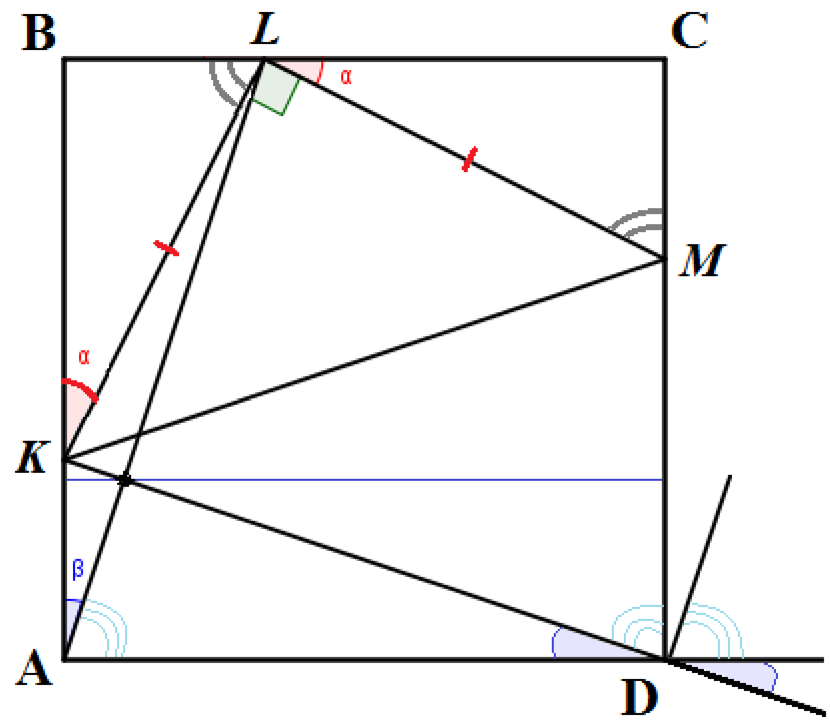
Observe que tal segmento é

Complementar, isto é,

A soma de seus ângulos é 90°.

Portanto,

os segmentos AL e DK são Perpendiculares.

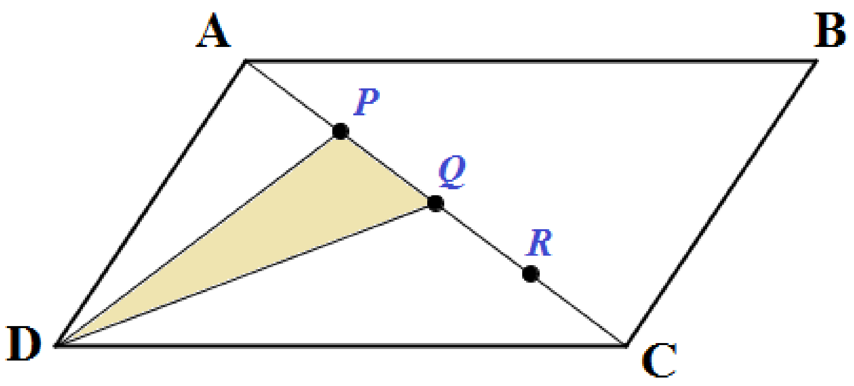


10. (Banco de Questões 2016, exercício 27) No paralelogramo ABCD de área 1, os pontos P, Q e R, nesta ordem, dividem a diagonal AC em quatro partes iguais. Qual é a área do triângulo DPQ?

10) Seja ABCD um paralelogramo qualquer com diagonal AC.

Observe que a diagonal AC divide a área do paralelogramo ao meio, isto é,

$$\frac{[ABCD]}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$



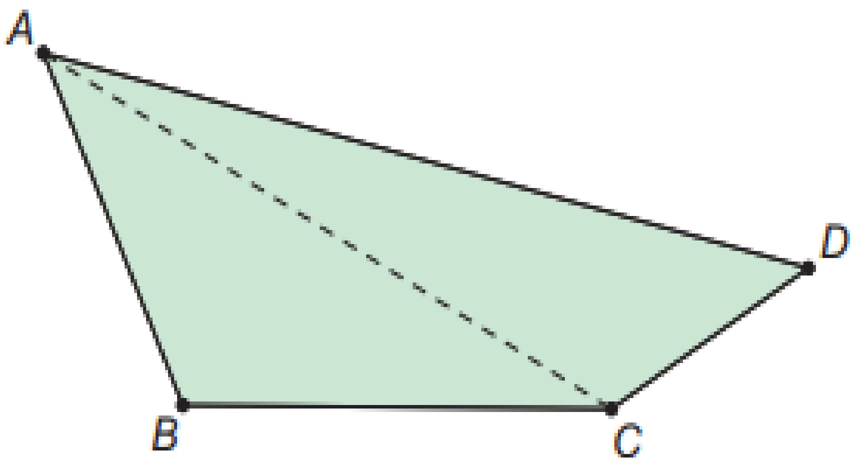
E como P, Q e R, dividem a diagonal AC em 4 partes iguais

Teremos 4 triângulos de mesma área. Isto é,

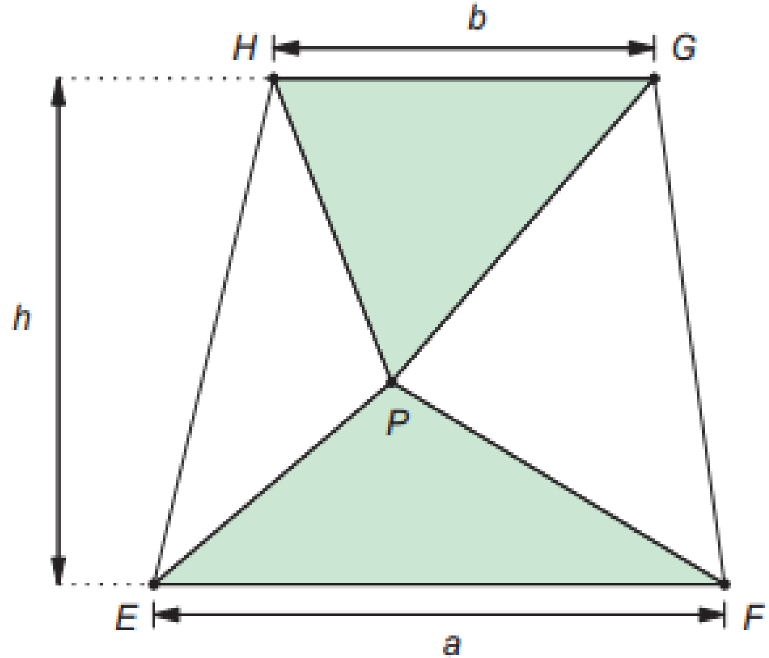
$$[DPQ] = \frac{1}{4}[ADC] \Rightarrow [DPQ] = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

11. (OBMEP 2016 – Q6N2 2ª fase) Ana quer dividir quadriláteros em quatro triângulos de mesma área.

a) A diagonal AC divide o quadrilátero ABCD da figura em dois triângulos de mesma área. Ana sabe que existe um ponto P nessa diagonal tal que os triângulos PAB, PBC, PCD e PDA têm a mesma área. Localize o ponto P na diagonal AC. Justifique sua resposta.

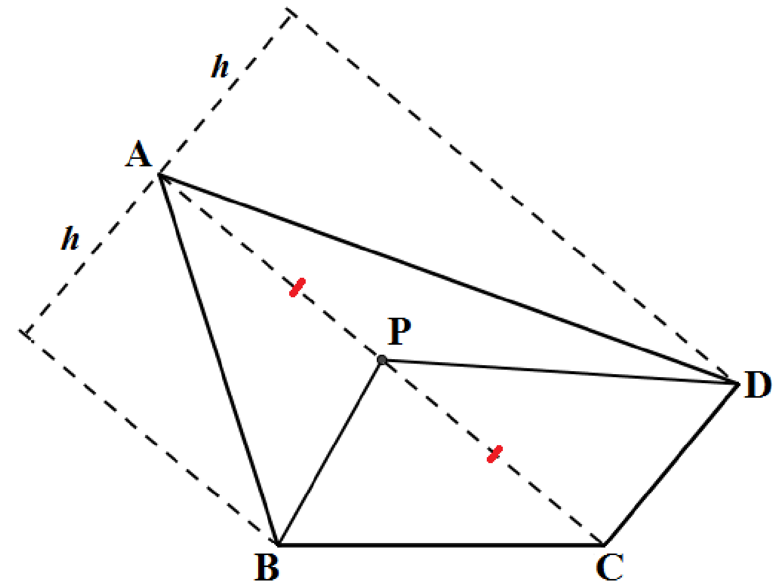


b) Ana desenhou um trapézio EFGH, de bases EF = a e GH = b, com a > b e altura h, como na figura. Em seguida, ela escolheu um ponto P tal que os triângulos PEF e PGH tivessem a mesma área. Expresse a área desses triângulos em termos de a, b e h.



c) Explique por que Ana nunca conseguirá escolher um ponto P no interior do trapézio EFGH do item anterior tal que os quatro triângulos PEF, PFG, PGH e PHE tenham todos a mesma área.

11)



a) Observe que para os 4 triângulos terem a mesma área, é preciso que tenham a mesma base e mesma altura.

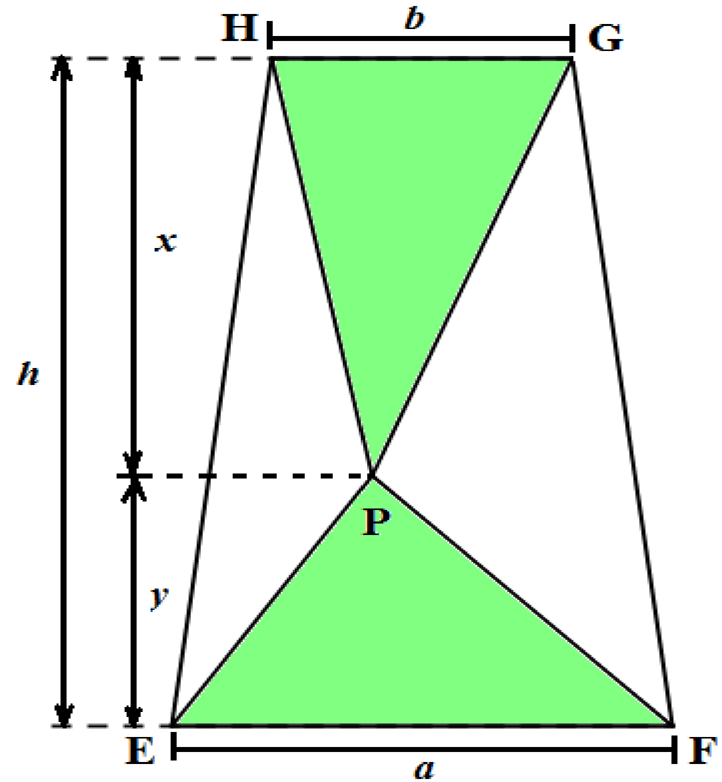
Observe que sendo P o ponto Médio da diagonal AC temos que os segmentos $AP = PC$ são as bases dos 4 triângulos.

E como a diagonal AC divide o quadrilátero em 2 triângulos de mesma área, sabemos que ΔABC e ΔADC possuem a mesma altura h.

Logo, h é altura dos 4 triângulos.

Portanto P é ponto médio da diagonal AC.

b) Sejam x e y as altura dos triângulos PGH e PEF, respectivamente.



Observe que

$$h = x + y$$

E $$y = h - x.$$

Assim,

$[PGH] = \frac{bx}{2}$ e $[PEF] = \frac{a(h-x)}{2}$

Como as áreas dos triângulos são iguais temos,

$$\frac{bx}{2} = \frac{a(h-x)}{2} \Rightarrow bx = ah - ax \Rightarrow ax + bx = ah$$

$$\Rightarrow (a+b)x = ah \Rightarrow x = \frac{ah}{a+b}$$

Portanto, podemos representar as áreas destes triângulos como:

$$[PGH] = [PEF] = \frac{bx}{2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{ah}{(a+b)} = \frac{abh}{2(a+b)}$$

c) Se P está no interior do trapézio do item anterior, então a soma das áreas dos quatro triângulos PEF, PFG, PGH e PHE é igual à área do trapézio. Temos,

$$[EFGH] = \frac{(a+b)h}{2}$$

se as áreas daqueles quatro triângulos são iguais, então cada um deles tem área igual

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(a+b)h}{8}$$

Mas pelo item anterior,

$$[PGH] = [PEF] = \frac{abh}{2(a+b)} = \frac{(a+b)h}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Mas pelo enunciado temos que a > b. Logo, não existe um ponto P no interior do trapézio EFGH tal que os quatro triângulos PEF, PFG, PGH e PHE têm a mesma área.