Módulo de Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas

Fatoração de Expressões Algébricas

Oitavo Ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *Siga o modelo e fatore as expressões:*

$$\boxed{3a + ba = a(3 + b)}$$

a) $5a + ba$.

b) $am + an$.

c) $xa + xb + xc$.

d) $ax + a$.

e) $ab + bc + abc$.

Exercício 2. *Simplifique as frações fatorando o denominador e o numerador.*

a) $\dfrac{3a + 5b}{6a + 10b}$.

b) $\dfrac{3x + 3y}{8x + 8y}$.

c) $\dfrac{3a^2 + 5a}{6a + 10}$.

d) $\dfrac{a(x + y) + b(x + y)}{(a - b)x + (a - b)y}$.

e) $\dfrac{x^4 + x^3}{x^2 + x}$.

Exercício 3. *Fatore por agrupamento as seguintes expressões:*

a) $a^2 + ab + ac + bc$.

b) $ax - bx + ay - by$.

c) $2ab + 2a + b + 1$.

d) $ax - bx + 2a - 2b$

e) $10ab - 2b + 15a - 3$

Exercício 4. *Fatore o numerador e o denominador e simplifique a expressão dada:*

a) $\dfrac{m^4 + m^2}{m^2 + 1}$.

b) $\dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x^2}$.

c) $\dfrac{m^4 + 3m^3 + 2m + 6}{(m + 3)^2}$.

Exercício 5. *Fatore as expressões abaixo usando a diferença de quadrados:*

a) $a^2 - 25b^2$.

b) $4x^2 - 1$.

c) $7 - x^2$.

d) $a^2x^2 - b^2y^2$.

e) $a^4 - b^4$

Exercício 6. *Para cada um dos itens abaixo, decida se a expressão dada é o quadrado de um binômio, isto é, se pode ser escrita na forma:*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ou como

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

a) $x^2 - 4x + 3$.

b) $x^2 + x + \dfrac{1}{4}$.

c) $y^2 + 6y + 18$.

d) $4z^2 - 12zy + 9y^2$.

e) $3z^2 + 6z + 3$.

Em caso afirmativo, escreva o binômio.

Exercício 7. *Fatore completamente as expressões abaixo:*

a) $x^4 - 2x^2 + 1$.

b) $5a^2 - 10a + 5$.

c) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.

Exercício 8. *Efetue as multiplicações e divisões indicadas como no exemplo:*

$$\begin{aligned} \frac{2ab}{3ax} \cdot \frac{5xy}{7by} &= \\ \frac{2\cancel{a}\cancel{b}}{3\cancel{a}\cancel{x}} \cdot \frac{5\cancel{x}\cancel{y}}{7\cancel{b}\cancel{y}} &= \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} &= \\ \frac{10}{21} \end{aligned}$$

a) $\dfrac{4a}{b} \cdot \dfrac{5b}{a}$.

b) $\dfrac{x^3 + x}{3y} \div \dfrac{x^2 + 1}{y^2}$.

c) $\dfrac{yx + x}{(x + 1)^2} \cdot \dfrac{xy + y}{(y + 1)^2}$.

Exercício 9. *Se $xy = 6$ e $x + y = 7$, quanto vale $x^2y + y^2x$?*

2 Exercícios de Fixação

Exercício 10. *Se, ao adicionarmos x ao numerador e subtrairmos x do denominador da fração $\dfrac{a}{b}$, com a e b reais, obtemos a fração $\dfrac{c}{d}$, com c e d reais e $c \neq -d$, qual o valor de x?*

Exercício 11. *Fatore as expressões:*

a) $a^2b - b^3$.

b) $x^2 - 2xy + y^2 - 9$.

c) $a^4 - 32a^2 + 256$.

Exercício 12. *Verifique que:*

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Em seguida, fatore $x^3 - 8$.

Exercício 13. *No exercício anterior, o que acontece se trocarmos y por $-z$?*

Exercício 14. *A soma de dois números é 4 e seu produto é 1. Encontre a soma dos cubos desses números.*

Exercício 15. *Se $xy = x + y = 3$, calcule $x^3 + y^3$.*

Exercício 16. *Seja x um número real tal que $x + \dfrac{1}{x} = 2$, calcule $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.*

Exercício 17. *Qual a forma mais simplificada da expressão $(a - b)^2 + (-a + b)^2 + 2(a - b)(b - a)$?*

Exercício 18. *Simplifique a expressão*

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}).$$

Exercício 19. *Fatore completamente $x^4 + 4$.*

Exercício 20. *Verifique que*

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n(n + 3) + 1)^2$$

Exercício 21. *Calcule o valor de:*

$$\sqrt{(2014)(2015)(2016)(2017) + 1}$$

Exercício 22. *Fatore $p^4 - 1$.*

Exercício 23. *Se $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{3 + \sqrt{8}}$, mostre que x é um inteiro negativo.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 24. *Fatore $n^5 + n^4 + 1$.*

Exercício 25. *Qual é o menor inteior positivo n tal que $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0,01$*

Exercício 26. *Encontre o quociente da divisão de $a^{32} - b^{32}$ por*

$$(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)$$

Exercício 27. *Verifique que*

$$\frac{(2^3 - 1)(3^3 - 1)\dots(100^3 - 1)}{(2^3 + 1)(3^3 + 1)\dots(100^3 + 1)} = \frac{3367}{5050}.$$

Exercício 28. *A sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \in \mathbb{Z}$ e $F_1 = F_2 = 1$. Determine o valor de:*

$$\left(1 - \frac{F_2^2}{F_3^2}\right)\left(1 - \frac{F_3^2}{F_4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{F_{2013}^2}{F_{2014}^2}\right)$$

(a) $\dfrac{F_{2016}}{F_{2013}^2}$ *(b)* $\dfrac{F_{2014}}{F_{2013}}$ *(c)* $\dfrac{F_{2015}^2}{F_{2013}^2}$
(d) $\dfrac{F_{2015}}{2}$ *(e)* $\dfrac{F_{2015}}{2F_{2013}F_{2014}}$.

Exercício 29. *Define-se o conjunto de 100 números $\{1, 1/2, 1/3, ..., 1/100\}$. Eliminamos dois elementos quaisquer a e b deste conjunto e se inclui, no conjunto, o número $a + b + ab$ ficando assim um conjunto com um elemento a menos. Depois de 99 destas operações, ficamos só com um número. Que valores pode ter esse número?*

Exercício 30. *Verifique que*

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z).$$

Exercício 31. *Se $x + y + z = 0$, verifique que:*

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$$

Exercício 32. *Fatore a expressão*

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3.$$

Exercício 33. *Verifique que:*

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Exercício 34. *Sejam a, b, c, x, y, z reais distintos tais que $ax + by + cz = 0$. Verifique que*

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2}$$

não depende de x, nem de y, nem de z.

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) $a(5+b)$.

b) $a(m+n)$.

c) $x(a+b+c)$.

d) $a(x+1)$.

e) $b(a+c+ac)$.

2. *a)* $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{3}{8}$.

c) $\frac{a}{2}$.

d) $\frac{a+b}{a-b}$.

e) x^2.

3. *a)* $(a+b)(a+c)$.

b) $(a-b)(x+y)$.

c) $(2a+1)(b+1)$.

d) $(a-b)(x+2)$.

e) $(5a-1)(2b+3)$.

4. *a)* m^2.

b) $\frac{x^2+1}{x^2}$.

c) $\frac{m^3+2}{m+3}$.

5.

a) $(a-5b)(a+5b)$.

b) $(2x-1)(2x+1)$.

c) $(\sqrt{7}-x)(\sqrt{7}+x)$.

d) $(ax-by)(ax+by)$.

e) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

6. *a) A expressão não representa um binômio perfeito. Se fosse $b^2=3$, deveríamos ter $b=\sqrt{3}$. Entretanto, $-4 \neq -2bx$.*

b) $x^2+x+\frac{1}{4}=(x+1/2)^2$.

c) A expressão não representa um binômio perfeito. Se fosse $b^2=18$, deveríamos ter $b=3\sqrt{2}$. Entretanto, $6 \neq 2by$.

d) $4z^2-12zy+9y^2=(2z-3y)^2$.

e) $3z^2+6z+3=(\sqrt{3}z+\sqrt{3})^2$.

7.

a) $(x-1)^2(x+1)^2$.

b) $5(a-1)^2$.

c)

$$\begin{aligned} a^2-b^2-2bc-c^2 &= \\ a^2-(b+c)^2 &= \\ (a-(b+c))(a+(b+c)) &= \\ (a-b-c)(a+b+c). & \end{aligned}$$

8.

a) 20.

b) $\frac{xy}{3}$.

c) $\frac{xy}{(x+1)(y+1)}$.

9.

$$\begin{aligned} x^2y+y^2x &= xy(x+y) \\ &= 6\cdot 7 \\ &= 42. \end{aligned}$$

2 Exercícios de Fixação

10. *(Extraído do vestibular da UNIVASF) Temos*

$$\begin{aligned} \frac{a+x}{b-x} &= \frac{c}{d} \\ &\Rightarrow \\ cb-xc &= ad+xd. \end{aligned}$$

Isolando os termos com x de um só lado e fatorando-o, obtemos: $cb-ad=xc+xd=x(c+d)$, ou seja, $x=\frac{bc-ad}{c+d}$.

11. *a)* $b(a-b)(a+b)$.

b) $(x-y-3)(x-y+3)$.

c) $(a-4)^2(a+4)^2$

12. *Pela distributividade, temos:*

$$\begin{aligned} (x-y)(x^2+xy+y^2) &= \\ (x^3+\cancel{x^2y}+\cancel{xy^2})-(\cancel{yx^2}+\cancel{xy^2}+y^3) &= \\ x^3-y^3 & \end{aligned}$$

Usando a fatoração fornecida, temos:

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4).$$

13. *Se $y = -z$, temos:*

$$\begin{aligned} x^3 + z^3 &= \\ x^3 + (-y)^3 &= \\ x^3 - y^3 &= \\ (x-y)(x^2+xy+y^2) &= \\ (x+z)(x^2-xz+z^2) & \end{aligned}$$

Obtemos assim uma fatoração para a soma dos cubos dada por:

$$x^3 + z^3 = (x+z)(x^2 - xz + z^2).$$

14. *Se x e y são esses números, temos:*

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= \\ (x+y)(x^2-xy+y^2) &= \\ (x+y)((x+y)^2-3xy) &= \\ 4\cdot(4^2-3) &= \\ 52 & \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= \\ (x+y)(x^2-xy+y^2) &= \\ (x+y)((x+y)^2-3xy) &= \\ 3\cdot(3^2-3) &= 18 \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} &= \\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{x} &= \\ 2^2 - 2 &= 2 \end{aligned}$$

17. *(Extraído da Olimpíada Cearense)*

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (-a+b)^2 + 2(a-b)(b-a) &= \\ [(a-b)+(-a+b)]^2 &= 0. \end{aligned}$$

18. *(Extraído da AIME) Aplicando a diferença de quadrados nos dois primeiros parênteses e nos dois últimos, temos:*

$$\begin{aligned} (\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}) &= \\ ((\sqrt{5}+\sqrt{6})^2-7) &= \\ (4+2\sqrt{30}) & \\ (\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{6}) &= \\ (7-(\sqrt{5}-\sqrt{6})^2) &= \\ (-4+2\sqrt{30}) & \end{aligned}$$

Assim, o produto é igual à:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{30}+4)(2\sqrt{30}-4) &= \\ 4\cdot 30 - 16 &= 104. \end{aligned}$$

19.

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\ &= (x^2+2)^2 - 4x^2 \\ &= (x^2-2x+2)(x^2+2x+2). \end{aligned}$$

20.

$$\begin{aligned} (n(n+3)+1)^2 &= n^2(n+3)^2 + 2n(n+3) + 1 \\ &= n(n+3)[n(n+3)+2]+1 \\ &= n(n+3)[n^2+3n+2]+1 \\ &= n(n+3)[(n+1)(n+2)]+1 \\ &= n(n+1)(n+2)(n+3)+1 \end{aligned}$$

21. *Usando o exercício anterior para $n = 2014$, obtemos* $(2014)(2017)+1$.

22.

$$\begin{aligned} p^4 - 1 &= (p^2-1)(p^2+1) \\ &= (p-1)(p+1)(p^2+1) \end{aligned}$$

23. *(Extraída do vestibular da UFRJ) Seja $y = \sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{3+\sqrt{8}}$. Claramente y é um inteiro positivo pois cada um dos radicais o é. Assim, o produto xy possui o mesmo sinal de x. Calculemos tal produto usando diferença de quadrados:*

$$\begin{aligned} xy &= (3-\sqrt{8})-(3+\sqrt{8}) \\ &= -2\sqrt{8}. \end{aligned}$$

Portanto, como $-\sqrt{8}$ é negativo, x também o é.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

24.

$$\begin{aligned} n^5+n^4+1 &= \\ n^5+n^4+n^3-n^3-n^2-n+n^2+n+1 &= \\ n^3(n^2+n+1)-n(n^2+n+1)+(n^2+n+1) &= \\ (n^2+n+1)(n^3-n+1). & \end{aligned}$$

25. *(Extraído da Olimpíada Cearense) Usando diferença de quadrados, temos:*

$$\begin{aligned} \sqrt{n}-\sqrt{n-1} &= \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

Para que o número anterior seja menor que $0,01$, devemos ter:

$$\sqrt{n}+\sqrt{n-1} > 100.$$

Se $n \leq 50^2$,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}+\sqrt{n-1} &< 50+\sqrt{2499}\\ &< 100.\end{aligned}$$

Se $n = 50^2+1$,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}+\sqrt{n-1} &= \sqrt{2501}+50\\ &> 100.\end{aligned}$$

Logo, o menor inteiro positivo que satisfaz a desigualdade do enunciado é $n = 50^2+1$.

26. *Aplicando a diferença de quadrados sucessivamente, temos:*

$$\begin{aligned}a^{32}-b^{32} &=\\ (a^{16}+b^{16})(a^{16}-b^{16}) &=\\ (a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^8-b^8) &=\\ (a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^4-b^4) &=\\ (a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2) &=\end{aligned}$$

Assim, o quociente é a^2-b^2.

27. *Note que $((x+1)^2-(x+1)+1) = (x^2+x+1)$. Verifiquemos agora uma fração genérica do produto:*

$$\begin{aligned}\frac{x^3-1}{x^3+1} &=\\ \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} &=\\ \frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{(x+1)^2-(x+1)+1}{x^2-x+1}\end{aligned}$$

A primeira parte da última expressão é uma fração onde o numerador e o denominador diferem por 2 e a segunda parte é um quociente de termos envonvendo a expressão n^2-n+1 quando n é $x+1$ e x. Vamos analisar a expressão anterior para cada valor de x no conjunto $\{2,3,\ldots,100\}$. Primeiramente vejamos o que acontece quando multiplicarmos apenas as frações que constituem a primeira parte da expressão:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{98}}{100}\cdot\frac{\cancel{99}}{101} &=\\ \frac{2}{100\cdot 101}.\end{aligned}$$

A segunda parte produz um cancelamento diferente:

$$\begin{aligned}\frac{\cancel{3^2-3+1}}{2^2-2+1}\cdot\frac{\cancel{4^2-4+1}}{\cancel{3^2-3+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{101^2-101+1}{\cancel{100^2-100+1}} &=\\ \frac{10101}{3}.\end{aligned}$$

Assim, o valor da expressão é:

$$\frac{2}{100\cdot 101}\cdot\frac{10101}{3}=\frac{3367}{5050}.$$

28. *(Extraído da OBM 2014) Observe que:*

$$\begin{aligned}1-\frac{F_k^2}{F_{k+1}^2} &= \frac{F_{k+1}^2-F_k^2}{F_{k+1}^2}\\ &= \frac{(F_{k+1}-F_k)(F_{k+1}+F_k)}{F_{k+1}^2}\\ &= \frac{F_{k-1}F_{k+2}}{F_{k+1}^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{F_2^2}{F_3^2}\right)\left(1-\frac{F_3^2}{F_4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{F_{2013}^2}{F_{2014}^2}\right) &=\\ \frac{F_1F_4}{F_3^2}\cdot\frac{F_2F_5}{F_4^2}\cdot\frac{F_3F_6}{F_5^2}\ldots\frac{F_{2012}F_{2015}}{F_{2014}^2} &=\\ \frac{F_1\cancel{F_4}}{\cancel{F_3^2}}\cdot\frac{F_2\cancel{F_5}}{\cancel{F_4^2}}\cdot\frac{\cancel{F_3}\cancel{F_6}}{\cancel{F_5^2}}\ldots\frac{\cancel{F_{2012}}F_{2015}}{\cancel{F_{2014}^2}} &=\\ \frac{F_1\cdot F_2\cdot F_{2015}}{F_3\cdot F_{2013}\cdot F_{2014}} &=\\ \frac{F_{2015}}{2F_{2013}F_{2014}}.\end{aligned}$$

Resposta E.

29. *(Extraído da Olimpíada do Cone Sul) Comecemos analisando alguma relação entre a, b e $a+b+ab$. O último termo lembra a fatoração:*

$$(a+1)(b+1) = ab+a+b+1.$$

Em cada momento após realizarmos as operações, se analisarmos a quantidade que representa o produto de todos os números do conjunto acrescidos de uma unidade. A equação anterior nos diz que tal produto nunca se altera. Consequentemente, no final teremos um único número x tal que:

$$(1+1/2)(1+1/3)\ldots(1+1/100) = (1+x).$$

Ou seja, $x = 99/2$. Para entender melhor que quantidade estamos analisando, façamos um exemplo pequeno. Suponha que em um dado momento temos os números 2, 3 e 5, devemos analisar o número

$$(2+1)(3+1)(5+1).$$

Se trocarmos $a = 2$ e $b = 3$ por $ab+a+b = 11$ e fizermos o novo produto obteremos:

$$(11+1)(5+1).$$

Perceba que o valor continua sendo o mesmo.

30. *Para fazer tal expansão, podemos considerar momentaneamente $x+y = w$ e a expressão que já conhecemos para o binômio:*

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &=\\ (w+z)^3 &=\\ w^3+3w^2z+3wz^2+z^3\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} w^3 &= \\ (x+y)^3 &= \\ x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 &= \\ x^3+y^3+3xy(x+y) &= \\ x^3+y^3+3xyw & \end{aligned}$$

Voltando para a expressão original, temos:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 &= \\ x^3+y^3+z^3+3xyw+3w^2z+3wz^2. & \end{aligned}$$

Resta estudarmos o termo:

$$\begin{aligned} 3xyw+3w^2z+3wz^2 &= \\ 3w(xy+wz+z^2) &= \\ 3(x+y)(xy+xz+yz+z^2) &= \\ 3(x+y)(x+z)(y+z) & \end{aligned}$$

Com isso, podemos concluir que:

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z).$$

31. *Na identidade anterior, podemos trocar a soma de quaisquer dois, pelo simétrico do terceiro obtendo:*

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 &= \\ x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z) &= \\ x^3+y^3+z^3+3(-z)(-y)(-x) &= \\ x^3+y^3+z^3-3xyz. & \end{aligned}$$

Como $(x+y+z)^3=0$, segue o resultado.

32. *Sejam $x=b-c$, $y=c-a$ e $z=a-b$. Pelo exercício anterior, como $x+y+z=0$, podemos escrever:*

$$\begin{aligned} (b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3 &= \\ x^3+y^3+z^3 &= \\ 3xyz &= \\ 3(b-c)(c-a)(a-b). & \end{aligned}$$

33. *Para fazer tal expansão, podemos considerar momentaneamente $x+y=w$ e a expressão que já conhecemos para o binômio:*

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= \\ (w+z)^2 &= \\ w^2+2wz++z^2 & \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} w^2 &= \\ (x+y)^2 &= \\ x^2+2xy+y^2. & \end{aligned}$$

Voltando para a expressão original, temos:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= \\ x^2+y^2+z^2+2xy+2wz &= \\ x^2+y^2+z^2+2xy+2(x+y)z &= \\ x^2+y^2+z^2+2xy+2x+2yz & \end{aligned}$$

Com isso, podemos concluir que:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$$

34. *Elevando ao quadrado a igualdade dada, temos*

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(abxy+bcyz+cazx) \quad = \quad 0$$

E consequentemente:

$$-2(abxy+bcyz+cazx) = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$

Daí, a expressão $bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2$ é igual a

$$\begin{aligned} & x^2(ab+ac)+y^2(ba+bc)+z^2(ca+cb) \\ & -2(abxy+bcyz+cazx) \\ = \; & x^2(a^2+ab+ac)+y^2(ba+b^2+bc)+ \\ & +z^2(ca+cb+c^2) \\ = \; & ax^2(a+b+c)+by^2(a+b+c)+ \\ & +cz^2(a+b+c) \\ = \; & (ax^2+by^2+cz^2)(a+b+c). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2} = \frac{1}{a+b+c},$$

que independe de x, y e z.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com