Uma Introdução às Construções Geométricas

Eduardo Wagner

versão 2015

Uma introdução às construções geométricas

Estrada Dona Castorina, 110 – Rio de Janeiro – 22460-320

Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Primeira edição
Décima primeira impressão

Capa: Rogério Kaiser

Wagner, Eduardo
Uma introdução às construções geométricas
Rio de Janeiro, IMPA, 2015
87 páginas
ISBN 978-85-244-0339-2

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: cad_obmep@obmep.org.br
www.obmep.org.br

Texto já revisado pela nova ortografia.

Εισαγωγή στις

Γεωμετρική κατασκευές

Eduardo Wagner

Apresentação

Οι γεωμετρικές κατασκευές ξεκίνησαν στην αρχαία Ελλάδα

As construções geométricas tiveram início na Grécia antiga.

Esta é a razão do título desta apostila estar escrito em grego. O desenvolvimento acelerado da Matemática no mundo antigo deveu-se a gregos geniais, pensadores, filósofos, cientistas que colocaram o raciocínio, a lógica e a razão como ferramentas para descobrir coisas novas e tentar explicar o mundo em que viviam. "Tudo é número" disse Pitágoras sintetizando o pensamento que tudo na natureza pode ser explicado pelos números, ou seja, pela Matemática. As construções geométricas estavam no centro desse desenvolvimento da Matemática.

As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas.

Esta apostila dedicada aos alunos da OBMEP traz uma introdução às construções geométricas. Nela, estamos dando a base para as construções abordando apenas dois temas: os lugares geométricos e as expressões algébricas. Com estes conteúdos bem estudados, o aluno terá facilidade em estudar um mundo novo que vem a seguir cujo foco principal é o das transformações geométricas. Mas isto fica para mais tarde. Por ora, desejo a todos um bom proveito nesta leitura. Você terá contato com problemas intrigantes, desafiadores, mesmo que a maioria não seja difícil. Mas é certamente gostoso resolver algo novo enquanto que ler problemas que já conhecemos é definitivamente aborrecido.

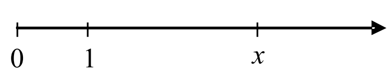
Sumário

Capítulo 1

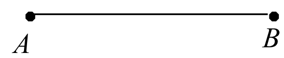
Construções Elementares

1.1 Introdução

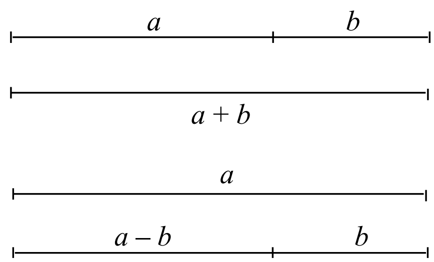
As construções geométricas aparecem na antiguidade e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática. Há 2 000 anos a palavra número significava número natural. Não havia números negativos e as frações não eram consideradas números, eram apenas razões entre números. Era de fato complicado. Se não havia ainda a noção de número racional, os números reais então estavam a séculos de distância. Entretanto os gregos tiveram uma ideia engenhosa. A de representar uma grandeza qualquer por um segmento de reta. Esta ideia é equivalente a dizer que todo número real positivo está associado a um ponto de uma semirreta graduada. Hoje, visualizamos o número real x assim:



Antigamente, a mesma ideia era vista assim:



As operações de adição e subtração de segmentos são inteiramente intuitivas.



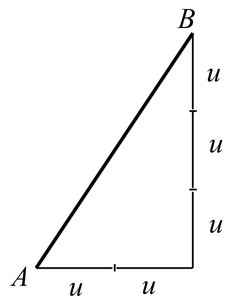
A multiplicação de dois segmentos podia ser visualizada como a área de um retângulo e a razão entre dois segmentos era ... Bem, era simplesmente isso mesmo, a razão entre dois segmentos.

Um problema comum hoje é, por exemplo, o de calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são 2 e 3. A solução é simples e usa o teorema de Pitágoras.

Se x é o comprimento da hipotenusa então

$$x = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

O mesmo problema antigamente era enunciado assim: construir o triângulo retângulo cujos catetos medem 2 unidades e 3 unidades. A solução era completamente geométrica. Era dado um segmento unitário u e o triângulo era construído com as medidas dadas.



Observe a figura acima. Se associarmos o segmento u ao número 1, o segmento AB é a visualização do número real $\sqrt{13}$.

Desta forma, *calcular* de hoje é sinônimo do *construir* de antigamente e as dificuldades são equivalentes. Se hoje achamos difícil calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo conhecendo o perímetro e a altura relativa à hipotenusa, é igualmente difícil desenhar o triângulo retângulo onde o perímetro e a altura são dados através de dois segmentos.

1.2 Paralelas e Perpendiculares

Nas construções geométricas são permitidos apenas a régua (não graduada) e o compasso. A régua serve apenas para desenhar uma reta passando por dois pontos dados e o compasso serve apenas para desenhar uma circunferência cujo raio é dado por um segmento e cujo centro é um ponto dado. Estes instrumentos não podem ser utilizados de nenhuma outra maneira.

A pureza das construções com régua e compasso é a mesma da geometria analítica que também resolve, de forma equivalente, problemas de geometria usando as coordenadas (pontos dados), a equação da reta (régua) e a equação da circunferência (compasso).

Para começar a desenhar, há dois problemas básicos que precisamos aprender.

1. Traçar por um ponto dado uma reta perpendicular a uma reta dada.

2. Traçar por um ponto dado uma reta paralela a uma reta dada.

Para resolver o primeiro, seja P um ponto dado fora de uma reta r dada. A construção é a seguinte. Com centro em P trace uma circunferência qualquer cortando a reta r nos pontos A e B como mostra a figura a seguir.

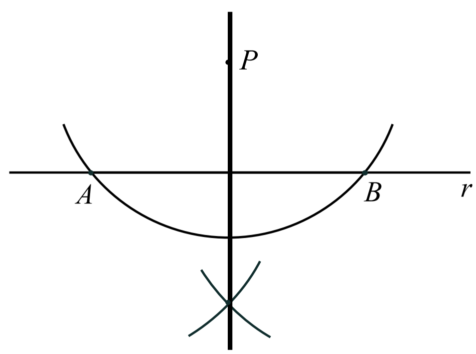


Figura 1

Em seguida, desenhamos dois arcos de circunferência de mesmo raio, com centros nos pontos A e B, determinando na interseção o ponto Q. A reta PQ é perpendicular à reta r e o primeiro problema está resolvido.

O fato importante das construções geométricas é que não basta encontrar a solução. É preciso justificar por que ela é correta. Neste primeiro problema, a primeira circunferência desenhada garante que $PA = PB$ e as duas seguintes, garantem que $QA = QB$. Assim, os pontos P e Q equidistam de A e B. Portanto, eles pertencem à mediatriz do segmento AB que é a reta perpendicular a AB passando pelo seu ponto médio.

Para resolver o segundo problema, seja P um ponto dado fora de uma reta r dada. A construção é a seguinte. Traçamos três circunferências com mesmo raio: a primeira com centro em P cortando a reta r em A; a segunda com centro em A cortando a reta r em B e a terceira com centro em B cortando a primeira circunferência em Q.

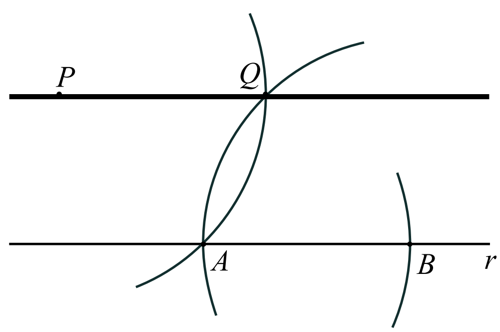


Figura2

A reta PQ é paralela à reta r e o problema está resolvido.

Para justificar, observe que, pelas construções efetuadas, $PABQ$ é um losango e, portanto seus lados opostos são paralelos.

Com a régua e o compasso, resolva o problema seguinte.

Problema 1.

Dado um segmento AB construa o triângulo equilátero ABC e sua altura CM.

Solução: Coloque a "ponta seca" do compasso em A e desenhe um arco de circunferência de raio AB e, em seguida faça o contrário: um arco de centro B e raio BA. Estes arcos cortam-se em C e D. Então, o triângulo ABC é equilátero e a reta CD é a mediatriz de AB.

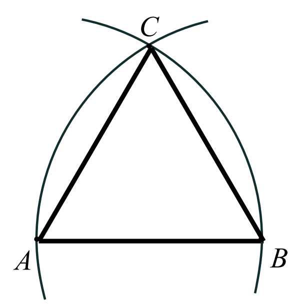
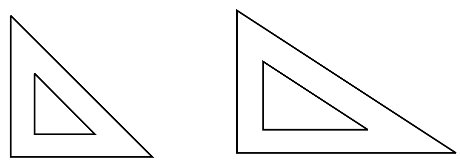


Figura 3

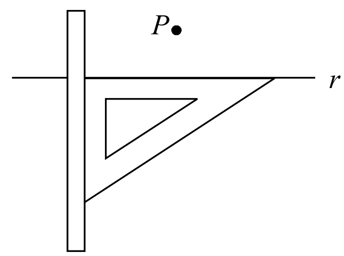
1.3 Tornando as Construções mais Práticas

Para tornar as construções mais práticas vamos permitir a utilização dos primeiros instrumentos impuros: os esquadros. Eles são construídos para facilitar e agilizar o traçado das construções de paralelas e perpendiculares. Eles são de dois tipos: um deles com ângulos de 90°, 45°, 45°e outro com ângulos de 90°, 60°, 30°.

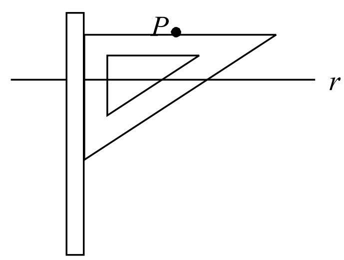


Veja, a seguir, como utilizamos a régua e os esquadros para o traçado de retas paralelas e perpendiculares.

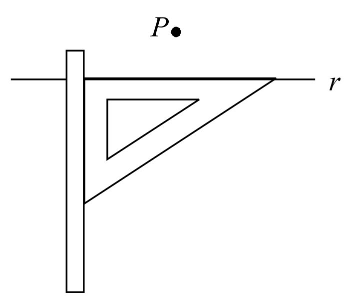
a) Traçar pelo ponto P a reta paralela à reta r.
Solução: Posicione a régua e um dos esquadros como na figura ao lado.



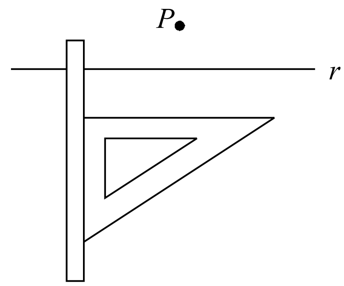
Fixe bem a régua e deslize o esquadro até que seu bordo passe pelo ponto P. Fixe o esquadro e trace por P a reta paralela à reta r.



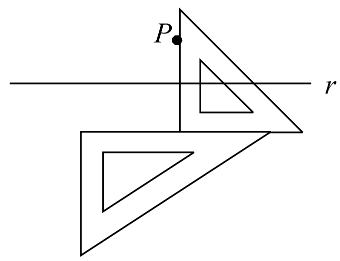
b) Traçar pelo ponto P a reta perpendicular à reta r.
Solução:
1º Passo.
Posicione a régua e um dos esquadros como na figura ao lado.



2º Passo.
Fixe a régua e afaste um pouco o esquadro da reta r para permitir um melhor traçado da perpendicular.

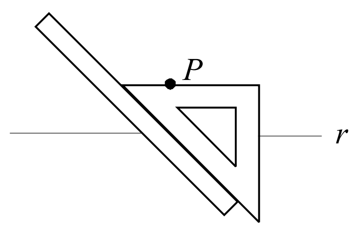


3º Passo.
Posicione o segundo esquadro sobre o primeiro e trace por P a perpendicular à reta r.

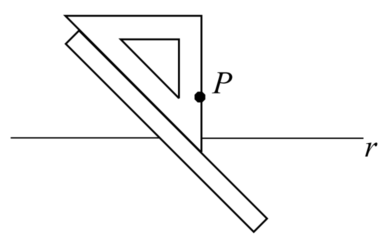


Uma outra solução é a seguinte:

1º Passo.
Posicione a régua e o esquadro de 45°como na figura ao lado.

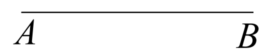


2º Passo.
Fixe a régua e deslize o esquadro até que o outro cateto passe por P.
Fixe o esquadro e trace por P a perpendicular à reta r.



Problema 2.

Dado o segmento AB, construa o quadrado $ABCD$.

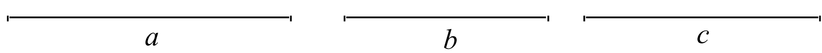


Solução: (Figura por conta do aluno).

Trace por A e B retas perpendiculares ao segmento AB. Trace as circunferências de centro A, passando por B e de centro B passando por A. As interseções dessas circunferências com as perpendiculares são os vértices C e D.

Problema 3.

Construir o triângulo ABC sendo dados os três lados:



Solução: Desenhe uma reta r e sobre ela assinale um ponto que chamaremos B. Para transportar o segmento a, pegue o compasso, ponha a ponta seca em uma das extremidades e abra até que a ponta do grafite coincida com a outra extremidade. Ponha agora a ponta seca em B e trace um pequeno arco cortando a reta r. Este é o ponto C tal que $BC = a$.

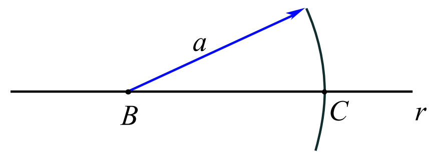


Figura 4

Pegue agora o segmento b com o compasso. Com centro em C desenhe, acima da reta r um arco de circunferência de raio b. Pegue o segmento c com o compasso e, com centro em B desenhe um arco de raio c. A interseção desses dois arcos é o vértice A do triângulo.

O exemplo anterior mostrou como transportar segmentos de um lugar para outro. Vamos mostrar agora como transportar ângulos.

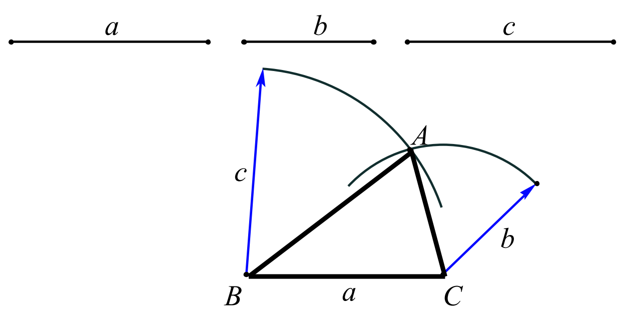
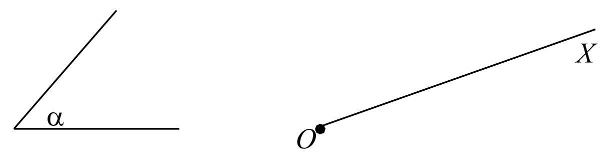


Figura 5

Problema 4.

Dado o ângulo α, e a semirreta OX construir o ângulo $XOY = \alpha$.



Solução: Com centro no vértice do ângulo dado trace um arco de circunferência cortando seus lados nos pontos A e B (veja figura 6). Sem modificar a abertura do compasso trace um arco com centro O cortando OX em C. Pegue com o compasso a distância AB e trace, com centro em C e com este raio, um arco determinando sobre o primeiro o ponto D. A semirreta OY que passa por D é tal que $XOY = \alpha$.

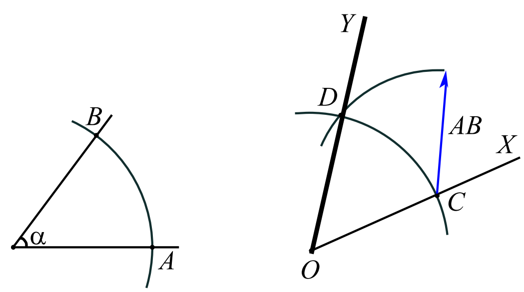
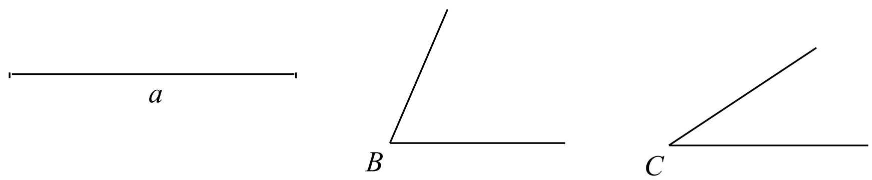


Figura 6

Problema 5.

Construir o triângulo ABC dados o lado a e os ângulos B e C:



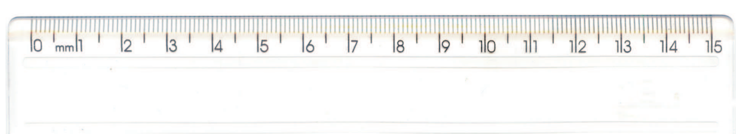
Solução: (Figura por conta do aluno)

Desenhe na sua folha de papel o segmento $BC = a$ e, em seguida transporte os ângulos dados construindo as semirretas BX e CY de forma que os ângulos CBX e BCY sejam iguais aos ângulos dados. A interseção das duas semirretas é o vértice A.

A partir de agora, vamos permitir, por comodidade, utilizar a régua graduada para fornecer as medidas dos segmentos e o transferidor para as medidas dos ângulos.

Assim o problema anterior poderia ser enunciado assim: construir o triângulo ABC sabendo que o lado BC mede 5 cm e que os ângulos B e C medem $62°$ e $38°$ respectivamente.

Os esquadros, a régua graduada e o transferidor são instrumentos que permitem tornar mais rápida e prática a execução dos desenhos, mas são apenas acessórios (podem ser dispensados). Os instrumentos essenciais são apenas a régua lisa e o compasso.



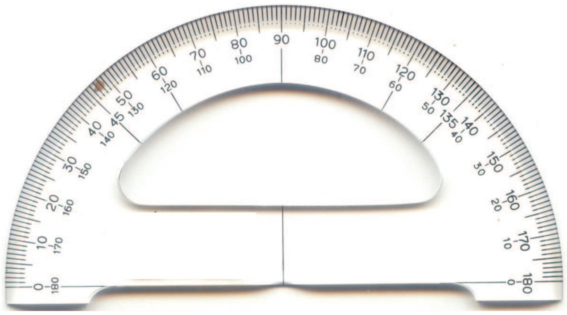


Figura 7

1.4 Divisão de um Segmento em Partes Iguais

Dividir um segmento dado em um número qualquer de partes iguais é uma das construções básicas e, frequentemente, precisaremos usá-la.

Dado o segmento AB, para dividi-lo, por exemplo, em 5 partes iguais, traçamos uma semirreta qualquer AX e sobre ela, com o compasso, determinamos 5 segmentos iguais: $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4$, A_4A_5 (ver figura 8).

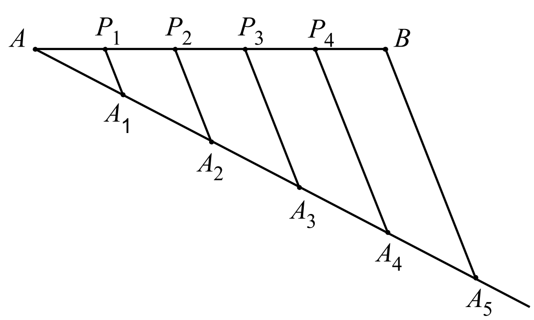


Figura 8

Trace agora a reta A_5B. As paralelas a esta reta traçadas pelos pontos A_1, A_2, A_3, A_4 determinam sobre AB os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 que o dividirão em 5 partes iguais.

Problema 6.

Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $BC = 5{,}3\,cm$, e as medianas $m_b = 4\,cm$ e $m_c = 5\,cm$.

Solução: Sabemos que a distância do baricentro a um vértice é igual a 2/3 da respectiva mediana. Assim, se G é o baricentro do triângulo ABC, o triângulo GBC pode ser construído porque o lado BC é conhecido e são também conhecidas as distâncias $GB = \dfrac{2}{3}m_b$ e $GC = \dfrac{2}{3}m_c$.

Observe, na figura 9 que dividimos cada mediana em três partes iguais para obter 2/3 de cada uma.

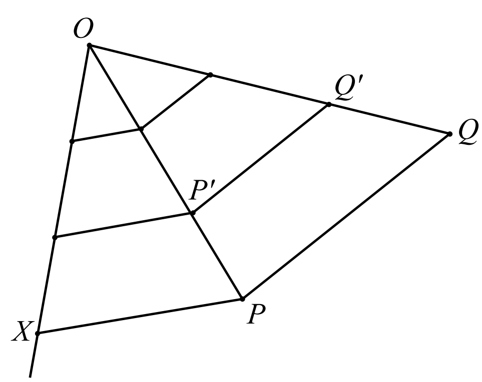


Figura 9

Uma vez construído o triângulo GBC, determinamos (com régua e compasso) o ponto médio de BC e, sobre a reta MG determinamos o ponto A tal que $MA = 3MG$. O problema está resolvido.

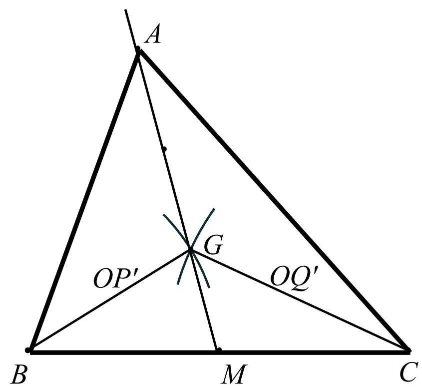


Figura 9A

Capítulo 2

Lugares Geométricos

As primeiras ferramentas das construções geométricas são os lugares geométricos básicos. Essas figuras, que mostraremos a seguir, permitirão desenvolver um método de construção que é baseado nas propriedades das figuras.

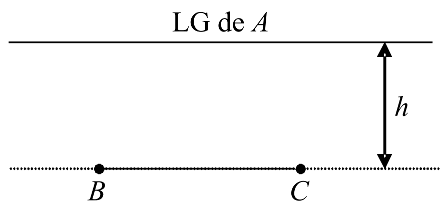
O que é um lugar geométrico?

A expressão (muito antiga) lugar geométrico, nada mais é que um conjunto de pontos e, para definir tal conjunto, devemos enunciar uma propriedade que esses pontos devem ter. Se essa propriedade é p, o conjunto dos pontos que possuem p é o lugar geométrico da propriedade p.

Por exemplo, o lugar geométrico dos pontos que distam 5 cm de um ponto A é a circunferência de centro A e raio 5 cm.

2.1 A Paralela

Imagine que a base BC de um triângulo ABC é dada e que a altura (h) relativa a esta base é também dada. Então, conhecemos a distância do vértice A até a reta BC e o lugar geométrico do vértice A é, portanto, uma reta paralela à reta BC distando h dela.



Problema 7.

Desenhe o triângulo ABC conhecendo os lados $AB = 4{,}5\,cm$, $BC = 5{,}2\,cm$ e a altura relativa ao lado $BC = 3{,}8\,cm$.

Solução: Trace uma reta r e sobre ela o segmento BC com o comprimento dado. Longe de BC desenhe uma reta perpendicular a r e seja X o ponto de interseção (ver figura 10). Assinale sobre ela o segmento $XY = 3{,}8\,\text{cm}$ e trace por Y uma paralela à reta r. Este é o lugar geométrico do vértice A.

Longe do seu desenho, construa um segmento de 4,5 cm usando a régua. Agora, ponha o compasso com esta abertura e, com centro em B, desenhe uma circunferência com este raio. A circunferência cortará a reta paralela em dois pontos mostrando que há duas soluções (diferentes) para o problema.

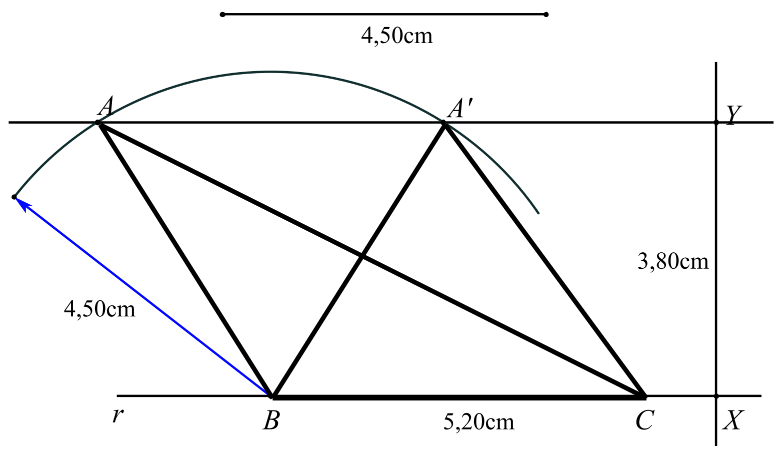


Figura 10

2.2 A Mediatriz

A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio. Veja que todo ponto da mediatriz tem mesma distância aos extremos do segmento.

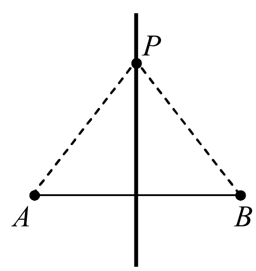


Figura 11

Observe também que se um ponto não está na mediatriz de AB então ele não equidista de A e B. Portanto, dizemos que a mediatriz de um segmento AB é o *lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e B*.

Para construir, traçamos dois arcos de circunferência com centros em A e B e com interseções P e Q como na figura 12.

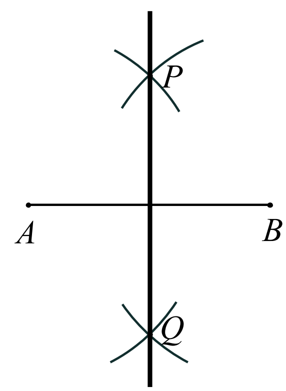


Figura 12

A reta PQ é a mediatriz de AB. Qual é a justificativa?

Observe a figura anterior e pense um pouco.

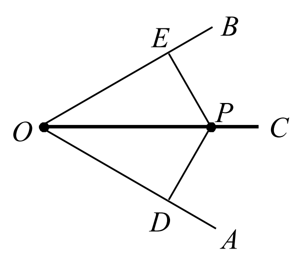
Pela construção que fizemos, $APBQ$ é um losango e, como sabemos, suas diagonais são perpendiculares.

2.3 A Bissetriz

A bissetriz de um ângulo $A\widehat{O}B$ é a semirreta OC tal que

$$A\widehat{O}C = C\widehat{O}B.$$

Costumamos dizer que a bissetriz "divide" o ângulo em dois outros congruentes. Todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do ângulo. Na figura a seguir, P é um ponto da bissetriz OC do ângulo $A\widehat{O}B$ e PD e PE são perpendiculares aos lados OA e OB.



Como os triângulos retângulos OPD e OPE são congruentes, temos $PD = PE$.

Portanto, a bissetriz de um ângulo é o *lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo.*

Para construir a bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$ traçamos com centro em O um arco de circunferência cortando os lados do ângulo em X e Y.

Em seguida, traçamos dois arcos de mesmo raio com centros em X e Y que se cortam em C.A semirreta OC é bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$. Qual é a justificativa?

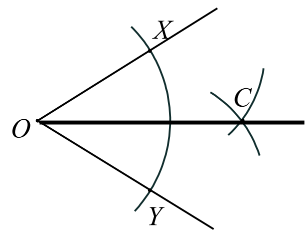


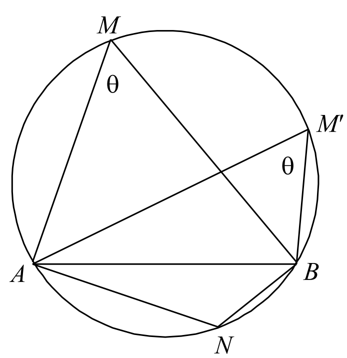
Figura 13

Observe a figura 13 e pense um pouco.

Pela construção que fizemos, os triângulos OXC e OYC são congruentes (caso LLL) e, portanto, $A\widehat{O}C = C\widehat{O}B$.

2.4 O Arco Capaz

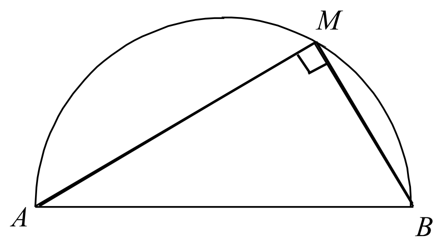
Considere dois pontos A e B sobre uma circunferência. Para todo ponto M sobre um dos arcos, o ângulo $AMB = \theta$ é constante.



Um observador que percorra o maior arco AB da figura acima, consegue ver o segmento AB sempre sob mesmo ângulo. Este arco chama-se *arco capaz do ângulo θ sobre o segmento AB*.

Naturalmente que, se um ponto N pertence ao outro arco AB então o ângulo ANB é também constante e igual a $180°-\theta$.

Ainda é interessante notar que se M é qualquer ponto da circunferência de diâmetro AB o ângulo $A\widehat{M}B$ é reto. Por isso, cada semicircunferência de diâmetro AB é chama de *arco capaz de* $90°$ *sobre AB*.



Construção do arco capaz:

São dados o segmento AB e o ângulo α. Para construir o lugar geométrico dos pontos que conseguem ver AB segundo ângulo α faça o seguinte:

1) Desenhe a mediatriz de AB.

2) Trace a semirreta AX tal que $B\widehat{A}X = \alpha$.

3) Trace por A a semirreta AY perpendicular a AX.

4) A interseção de AY com a mediatriz, é o ponto O, centro do arco capaz.

Com centro em O desenhe o arco AB.

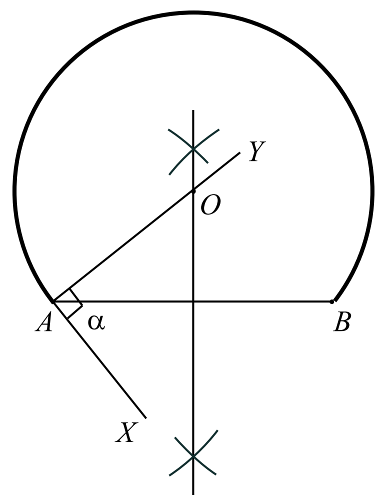


Figura 14

O arco AB que você desenhou é o lugar geométrico do ângulo α construído sobre o segmento AB. Para justificar, observe que se $B\widehat{A}X = \alpha$ então $B\widehat{A}Y = 90°-\alpha$ e, sendo M o ponto médio de AB, temos que $A\widehat{O}M = \alpha$. Assim $A\widehat{O}B = 2\alpha$ e, para qualquer ponto M do arco AB tem-se $A\widehat{M}B = \alpha$.

Problema 8.

Construir a circunferência que passa por três pontos A, B, e C dados em posição.

Solução: Seja O, o centro da circunferência que passa por A, B e C. Como $OB = OC$, então O pertence à mediatriz de AB. Como

$OB = OC$ então O pertence à mediatriz de BC. Assim, o ponto O é a interseção dessas duas mediatrizes. Veja figura 15.

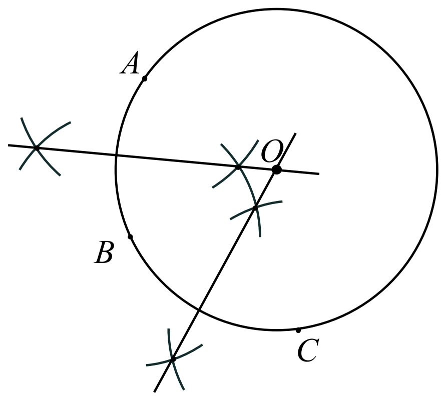


Figura 15

Problema 9.

Construir a circunferência inscrita em um triângulo dado.

Solução: Seja ABC o triângulo dado. O centro da circunferência inscrita (incentro) é o ponto de interseção das bissetrizes internas. Precisamos então traçar as bissetrizes de dois ângulos do triângulo.

O ponto de interseção das duas bissetrizes (I) é o centro da circunferência inscrita, mas não podemos ainda desenhá-la, pois não conhecemos o raio.

Atenção: *O compasso só pode ser usado para desenhar uma circunferência com centro e raio conhecidos.* Não se pode ajeitar nada ou traçar nada "no olho".

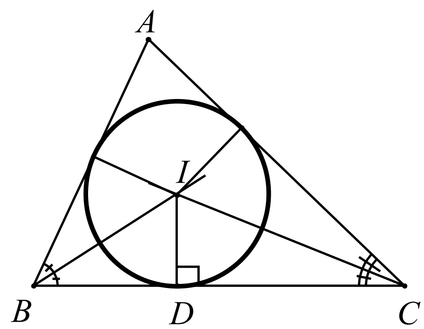


Figura 16

Continuando o problema, traçamos por I uma reta perpendicular a BC, cortando BC em D. Temos agora um ponto por onde passa a circunferência inscrita. Traçamos então a circunferência de centro I e raio ID e o problema está resolvido.

Nas construções geométricas a solução de um problema, em geral, não nos ocorre imediatamente. É preciso analisar a situação e pensar. Para analisar a situação devemos *imaginar o problema já resolvido* para buscar as propriedades que permitirão a solução. Você verá, a partir de agora, os problemas sendo analisados desta maneira.

Problema 10.

Traçar por um ponto exterior a uma circunferência as duas retas tangentes.

Solução: Imagine que o ponto P e a circunferência de centro O estejam dados em posição. Imaginemos o problema resolvido.

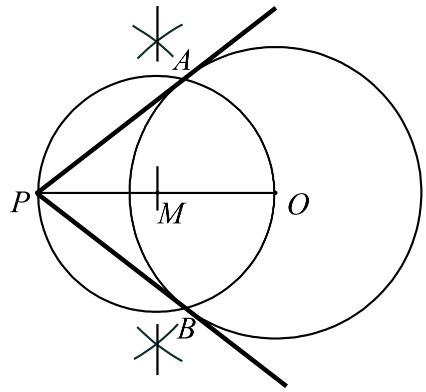


Figura 17

Se PA é tangente em A à circunferência então OA é perpendicular a PA. Como o ângulo $P\widehat{A}O$ é reto então o ponto A pertence a uma semicircunferência de diâmetro PO. Como o mesmo vale para o ponto B a construção é a seguinte.

Determinamos o ponto M médio de PO traçando a mediatriz de PO. Traçamos a circunferência de centro M e raio $MP = MO$ que corta a circunferência dada em A e B. As retas PA e PB são tangentes à circunferência dada. O problema está resolvido.

Problema 11.

São dados: uma circunferência de centro O, um ponto P e um segmento a. Pede-se traçar por P uma reta que determine na circunferência uma corda de comprimento a.

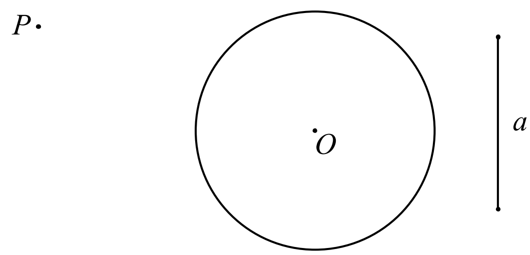


Figura 18

Solução: Este é um problema que, novamente, os dados estão em posição. Para analisar o problema, imagine, na circunferência, uma corda AB de comprimento a. Imagine agora todas essas cordas.

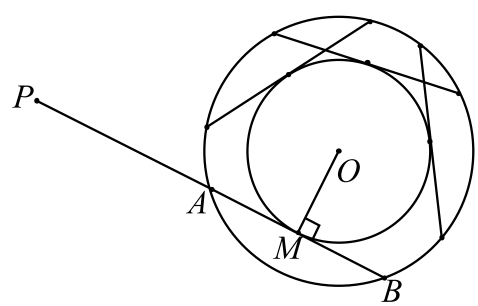


Figura 19

Se M é o ponto médio da corda AB de comprimento a e em qualquer posição então OM é constante pois OA e AM são constantes. Assim, o lugar geométrico de M é uma circunferência de centro O. Por outro lado, supondo o problema resolvido, a reta que passa por P

e determina na circunferência dada uma corda de comprimento a é tal que $P\widehat{M}O = 90°$ e, portanto, M também pertence à circunferência de diâmetro BC.

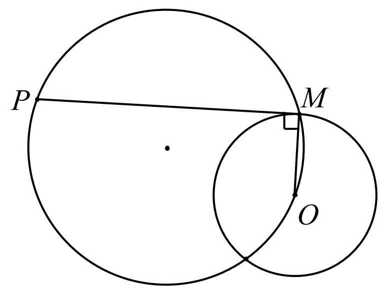


Figura 20

A construção agora pode ser feita. Siga todos os passos.

1) Assinale um ponto X qualquer sobre a circunferência dada.

2) Pegue com o compasso o segmento dado e determine, sobre a circunferência um ponto Y tal que $XY = a$.

3) Trace por O uma perpendicular a XY determinando o ponto Z médio de XY.

4) Trace a circunferência de centro O e raio OZ, que é um lugar geométrico de M.

5) Trace a mediatriz de PO determinando o seu ponto médio C.

6) Com centro em C trace a circunferência de diâmetro PO, que é outro lugar geométrico de M.

7) As duas circunferências cortam-se em M e M'.

8) As retas PM e PM' são a solução do problema.

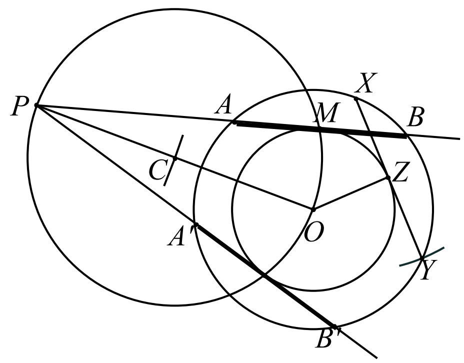


Figura 21

Construir figuras ou resolver situações pelo método dos lugares geométricos consiste essencialmente no que vimos no problema anterior. Existe um ponto-chave (no caso, M) e conseguimos, através das propriedades das figuras, encontrar dois lugares geométricos para ele. Assim, estando o ponto-chave determinado, o problema fica resolvido. Frequentemente, o ponto-chave é a própria solução do problema.

Veja a seguir.

Problema 12.

Construir o triângulo ABC sendo dados: o lado $BC = 4{,}5$ cm, o ângulo $A = 60°$ e a altura relativa ao lado BC, $h = 3{,}2$ cm.

Solução: Se $B\widehat{A}C = 60°$ então A está no arco capaz de $60°$ construído sobre BC. Por outro lado, como o vértice A dista 3,2 cm da reta BC, ele está em uma reta paralela a BC distando 3,2 cm da reta BC. A construção está a seguir.

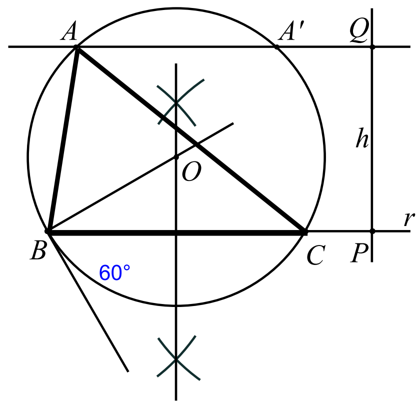


Figura 22

Sobre uma reta r assinale o ponto B e construa o segmento BC. Construa o arco capaz de 60° sobre BC que é o primeiro lugar geométrico para o vértice A. Para colocar a altura, assinale um ponto P qualquer sobre a reta r (de preferência longe do arco capaz), trace por P uma perpendicular a r e, sobre ela, determine o ponto Q tal que $PQ = h$. A paralela à r traçada por Q é o segundo lugar geométrico de A e o problema está resolvido.

A reta paralela cortou o arco capaz em dois pontos, A e A’. Como os triângulos ABC e A’BC são congruentes, dizemos que o problema possui apenas uma solução.

Problema 13.

Construir o triângulo ABC conhecendo os lados $AB = 5{,}2$ cm, $BC = 5{,}7$ cm e a altura relativa ao lado AB, $h = 4{,}5$ cm.

Solução: Faça um desenho imaginando o problema resolvido e seja $CD = h$ a altura relativa ao lado AB. Como o ângulo $B\widehat{D}C$ é reto, o ponto D pertence ao arco capaz de 90° construído sobre BC. Como CD é conhecido, determinamos o ponto D. Sobre a reta BD determinamos o ponto A e o problema está resolvido.

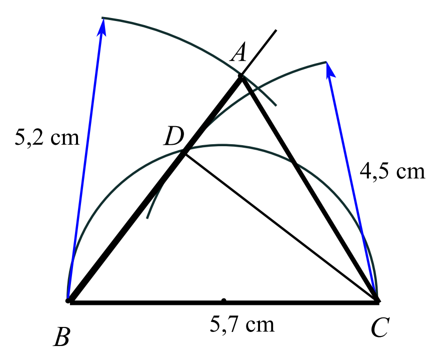


Figura 23

O próximo problema tem especial interesse pois o artifício que vamos utilizar será útil na solução de vários outros problemas.

Problema 14.

É dado o triângulo ABC com $AB = 4$ cm, $BC = 6{,}5$ cm e $CA = 7$ cm. Trace uma reta paralela a BC cortando AB em M e AC em N de *forma que se tenha $AN = BM$.*

Solução: Imaginemos o problema resolvido.

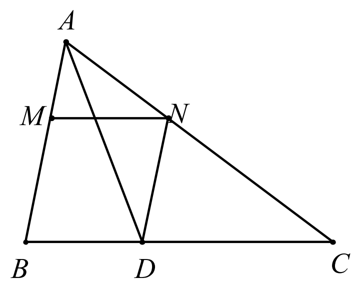


Figura 24

Repare que não adianta nada termos dois segmentos de mesmo comprimento sem conexão entre si. Uma ideia, portanto na nossa figura de análise é traçar por N o segmento ND paralelo a MB. Como $MNDB$ é um paralelogramo temos $ND = MB$ (dizemos que foi feita uma translação no segmento MB). Logo, $AN = ND$ e o triângulo AND é isósceles. Veja agora que:

$\angle ADN = \angle DAN$ porque $AN = ND$.

$\angle ADN = \angle DAB$ porque são alternos internos nas paralelas AB e ND.

Assim, AD é bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ do triângulo ABC e o problema está resolvido.

Para construir:
Construa inicialmente o triângulo ABC com os três lados dados.
Trace a bissetriz do ângulo $B\widehat{A}C$ que corta BC em D.

Trace por D uma paralela a AB que corta AC em N.
Trace por N uma paralela a BC que corta AB em M.
(figura final por conta do leitor).

Problema 15.

Desenhe uma reta r e dois pontos A e B situados de um mesmo lado de r. Determine o ponto P sobre a reta r de forma que a soma $AP + PB$ seja mínima.

Solução: Para analisar o problema, desenhamos a reta r, e dois pontos A e B quaisquer de um mesmo lado de r. Obtenha o ponto B', simétrico de B em relação à r. Para fazer isto, trace por B uma perpendicular à r e, com o compasso, passe B para o outro lado obtendo o seu simétrico.

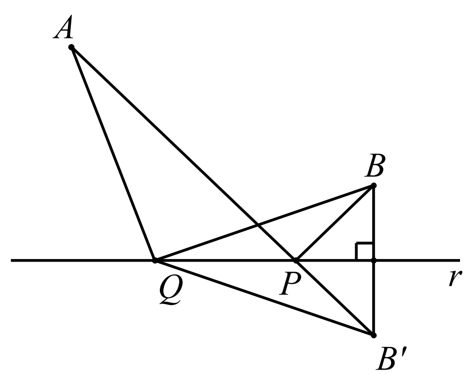


Figura 25

Assinale um ponto Q qualquer, sobre a reta r. Trace QA, QB e QB'. Como r é mediatriz de BB' então $QB = QB$'. Assim a soma

$AQ + QB$ é sempre igual a $AQ + QB$'. Entretanto esta soma será mínima quando A, Q e B' forem colineares. E nesta posição está o ponto P procurado.

A construção do problema do *caminho mínimo* entre dois pontos passando por uma reta é então imediata. Desenhe o simétrico de um dos pontos em relação à reta e ligue este simétrico ao outro ponto. A interseção com a reta dada é a solução do problema.

A seguir daremos uma lista de problemas propostos sendo os primeiros, é claro, mais fáceis. Cada problema é um desafio novo, desde a análise até o momento de decidir o que se deve fazer primeiro. Confira depois sua construção com a que está no gabarito e bom trabalho.

Problemas Propostos

1) Construa um quadrado cuja diagonal tenha 4,5 cm

2) Desenhe uma circunferência de 3,2 cm de raio e construa o triângulo equilátero inscrito nela.

3) Desenhe um triângulo cujos lados medem 5 cm, 6 cm e 7 cm. Quanto mede, aproximadamente o raio da circunferência circunscrita?

4) Construa o triângulo ABC conhecendo os lados $AB = 5{,}2$ cm, $AC = 6{,}5$ cm e a altura relativa ao vértice A igual a 4,5 cm. Quanto mede o ângulo $B\widehat{A}C$?

5) Construa o trapézio $ABCD$ conhecendo a base maior $AB = 7$ cm, a base menor $CD = 2$ cm, e os lados $AD = 3{,}4$ cm e

$BC = 5{,}1\,\text{cm}$.

6) Construir o triângulo ABC conhecendo o ângulo $\widehat{B} = 50°$ e os lados $AB = 6\,\text{cm}$ e $BC = 4{,}8\,\text{cm}$.

7) Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $BC = 4{,}7\,\text{cm}$ e as medianas $BB' = 5\,\text{cm}$ e $CC' = 3{,}5\,\text{cm}$.

8) Construa o trapézio isósceles sabendo que as bases medem 6,5 cm e 2,5 cm e que as diagonais medem 5,5 cm.

9) Construa o hexágono regular cujo lado mede 2,4 cm.

10) No triângulo ABC o lado BC mede 5 cm, o ângulo $\widehat{A}$ mede 60° e a mediana AA' mede 4 cm. Se $AC < AB$ quanto mede, aproximadamente o ângulo $\widehat{B}$?

11) Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $BC = 7\,\text{cm}$ e as alturas $BD = 5{,}4\,\text{cm}$ e $CE = 6{,}7\,\text{cm}$.

12) No plano cartesiano com os eixos graduados em centímetros, uma circunferência C tem centro $(0, 3)$ e raio 2 cm. Determine um ponto P do eixo dos X tal que as tangentes traçadas de P a C tenham comprimento de 4,5 cm.

13) Construir o triângulo ABC conhecendo a mediana $AA' = 5\,\text{cm}$ e as alturas $BD = 6\,\text{cm}$ e $CE = 4{,}7\,\text{cm}$.

14) Construir o triângulo ABC, retângulo em A conhecendo a hipotenusa $BC = 6\,\text{cm}$ e a soma dos catetos $AB + AC = 8{,}1\,\text{cm}$.

15) Construir o triângulo ABC de perímetro 11 cm sabendo que os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ medem, respectivamente, 58° e 76°.

16) Construir o trapézio $ABCD$ conhecendo a soma das bases $AB + CD = 8{,}6\,\text{cm}$, as diagonais $AC = 6\,\text{cm}$ e $BD = 5\,\text{cm}$ e o lado $AD = 4\,\text{cm}$.

17) As paralelas r e s são as margens de um rio e os pontos A e B estão em lados opostos desse rio. Determine a posição de uma ponte PQ perpendicular às margens ($P \in r$ e $Q \in s$) de forma que o percurso $AP + PQ + QB$ seja mínimo.

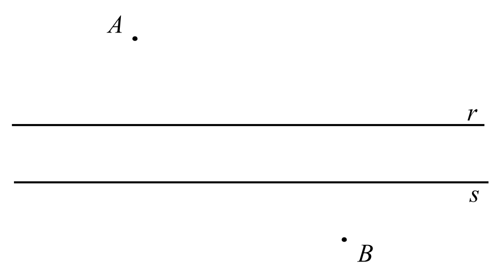


Figura 26

18) Construir o triângulo ABC sabendo que $AB = 5{,}8\,\text{cm}$, $\cos A = 0{,}6$ e que o lado BC é o menor possível.

19) Dado um segmento m e, em posição, os pontos P, A e B (figura 27), traçar por P uma reta r de forma que A e B fiquem de um mesmo lado de r e de tal forma que a soma das distâncias de A e B à r seja igual a m.

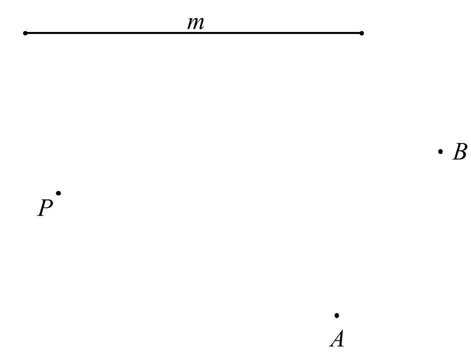


Figura 27

20) São dadas duas circunferências K e K’ e um segmento a (figura 28). Traçar pelo ponto A a secante PAQ ($P \in K$ e $Q \in K$’) de forma que se tenha $PQ = a$.

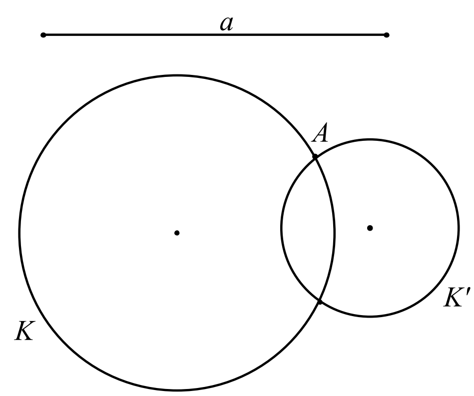


Figura 28

21) Usando uma figura igual à do exercício anterior, trace a secante

PAQ de comprimento máximo.

22) Uma mesa de sinuca tem vértices dados em coordenadas: $A = (0,0)$, $B = (8,0)$, $C = (8,4)$ e $D = (0,4)$. Uma bola P é atirada, sem efeito, em um ponto Q da tabela BC. Após as reflexões nas tabelas BC e CD ela cai na caçapa A. Determine a posição exata do ponto Q e faça o desenho da trajetória.

23) De uma circunferência C conhecemos apenas o arco abaixo (figura 29). Limitando-se ao espaço disponível (interior do retângulo), determine o raio de C.

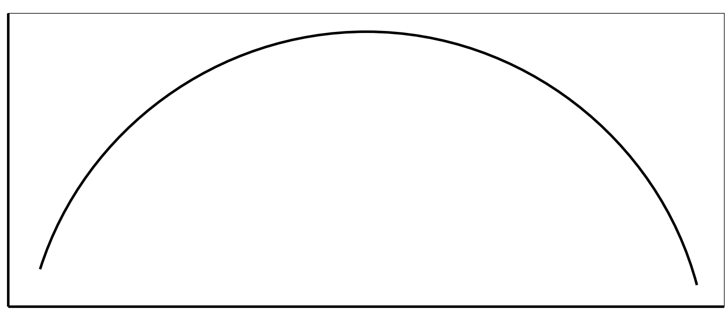


Figura 29

24) Na figura 30, cada um dos pontos M, N, P e Q pertence a um lado de um quadrado. Construa esse quadrado.

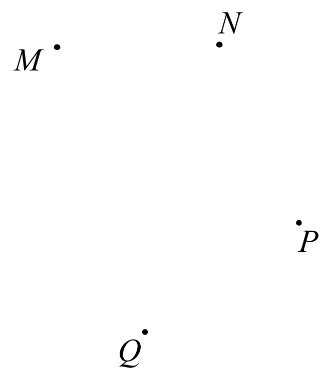


Figura 30

25) São dados em posição (figura 31) os pontos A, B, C e D sobre a reta r. Trace por A e B duas paralelas e trace por C e D outras duas paralelas de forma que as interseções dessas retas formem um quadrado.

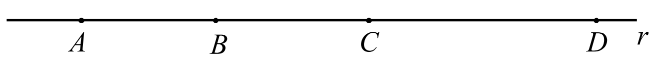


Figura 31

Capítulo 3

Expressões Algébricas

Neste capítulo vamos aprender a construir as figuras e resolver os problemas utilizando um ponto de vista muito diferente. No capítulo anterior, você já reparou que, muitas vezes, necessitamos de altas doses de criatividade para conseguir a chave para a resolução de um problema. O detalhe mínimo mas essencial, para conseguir encontrar o caminho da solução, os alunos chamam de *mágica* e, de fato, não deixa de ser. Entretanto, nem sempre a mágica nos ocorre.

A outra abordagem de um problema de construção consiste em escolher um segmento da figura a ser construída que será tomado como incógnita. Utilizando as propriedades e teoremas da geometria podemos tentar resolver o problema algebricamente e encontrar uma fórmula que determina a incógnita em função dos dados do problema. Passaremos então a construir, com régua e compasso, a fórmula encontrada e este caminho é também bastante interessante.

Em todo o capítulo cada segmento está identificado com sua medida. Assim, quando se fala em um segmento a, você tem toda a liberdade de imaginar que a é a medida desse segmento em uma dada unidade. Mas para permitir esta dualidade, é necessário que nossas fórmulas sejam homogêneas. Assim, se a e b são segmentos (ou os números que os representam), faz sentido escrever $a + b$ ou $a^2 + b^2$. No primeiro caso, estamos somando dois segmentos e no segundo, estamos somando as áreas de dois quadrados de lados a e b. Por isso, nas construções geométricas nesta abordagem inicial, não tem sentido escrever $a+b^2$, pois um segmento não pode ser somado com uma área. Vamos começar para que você veja do que estamos falando.

3.1 A 4ª Proporcional

Dados os segmentos a, b e c dizemos que o segmento x é *quarta proporcional* desses segmentos quando:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Esta relação de proporcionalidade já aparece no século 5 $a.C.$ e sua construção é feita com o argumento do teorema de Tales.

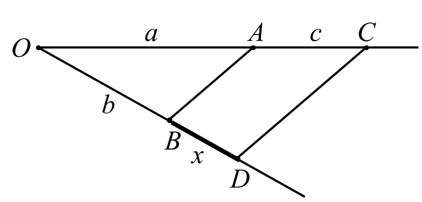


Figura 1

Sobre um ângulo qualquer de vértice O tomemos sobre um lado os segmentos $OA = a$ e $AC = c$ e, sobre o outro lado, $OB = b$. Traçando por C uma paralela à reta AB determinamos D na semirreta OB. O segmento $BD = x$ é a solução da equação.

Veja a seguir um problema cuja solução pode ser feita com a 4ª proporcional.

Problema 16.

Inscrever no triângulo ABC (figura 2) um quadrado tendo um lado sobre BC.

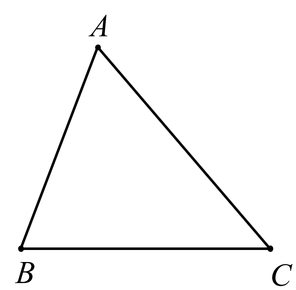


Figura 2

Solução: Suponha o problema resolvido. A figura 3 mostra o quadrado $MNPQ$ inscrito em ABC com o lado MN sobre BC.

Seja x o lado do quadrado. Vamos calcular este valor em função da base $BC = a$ do triângulo e da altura relativa à esta base (h). O triângulo APQ, que tem base $PQ = x$ e altura $h - x$ é semelhante ao

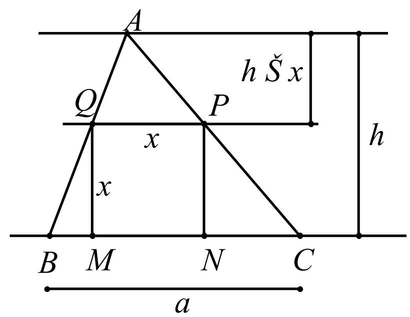


Figura 3

triângulo ABC. Logo,

$$\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$$

Daí,

$$xh = ah - ax$$

$$ax + xh = ah$$

e

$$x = \frac{ah}{a+h}.$$

Temos então uma fórmula que calcula x em função de a e h. Vamos tratar agora de “construir” esta fórmula.

Observe que $x = \dfrac{ah}{a+h}$ é o mesmo que $\dfrac{a+h}{a} = \dfrac{h}{x}$, ou seja, a nossa incógnita x é a 4ª proporcional entre $a+h$, a e h. A figura 4 mostra como obter x usando o teorema de Tales.

Com a construção anterior, conhecemos o lado do quadrado e agora, devemos pensar como construí-lo dentro do triângulo. Não é difícil. Podemos traçar a altura AD e, sobre ela (com o compasso) construir o ponto E tal que $DE = x$. A paralela por E à reta BC determina os vértices P e Q do quadrado.

Sendo a e b os segmentos dados, a *terceira proporcional* entre a e b é o segmento x tal que $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$, ou seja, $x = \frac{b^2}{a}$. A construção é a mesma que mostramos para a quarta proporcional.

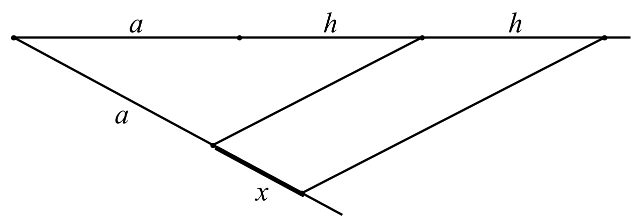


Figura 4

3.2 $\sqrt{a^2 \pm b^2}$

Sejam a e b segmentos dados. Se $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$ então x é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são a e b. Basta então construir duas semirretas perpendiculares (você pode usar os esquadros) e assinalar os segmentos $OA = a$ e $OB = b$. A hipotenusa $AB = x$ é a solução da equação.

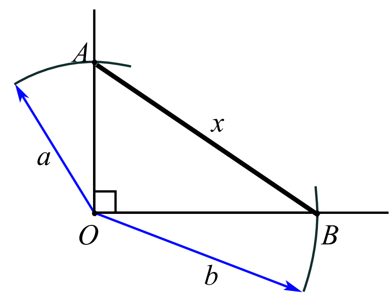


Figura 5

No outro caso, se a e b são os segmentos dados e $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ então x é um cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a, sendo b o outro cateto. Para construir devemos desenhar duas semirretas perpendiculares assinalar o segmento $OB = b$ sobre uma delas e, com centro em B, desenhar um arco de raio a cortando a outra perpendicular em A. O cateto $OA = x$ é a solução da equação.

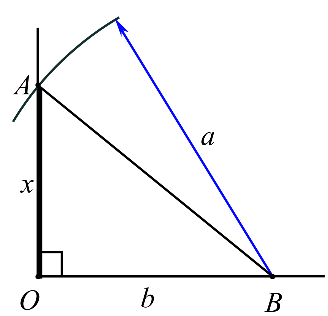


Figura 6

Estas construções me lembram um aluno que me contou que, quando estava na 7ª série, uma questão de uma prova de múltipla escolha pedia para assinalar o valor aproximado de $\sqrt{6{,}7^2 + 8{,}6^2}$.

Enquanto todos os colegas se esforçavam nas contas ele construiu com sua régua e esquadro, com todo o cuidado, o triângulo retângulo de catetos 6,7 cm e 8,6 cm. Depois, mediu a hipotenusa encontrando 10,9 cm. Ele tinha encontrado a resposta em menos de um minuto.

Expressões do tipo $\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm \ldots}$ podem ser construídas sem dificuldade bastando aplicar várias vezes os procedimentos descritos acima.

Problema 17.

Construir a diagonal de um paralelepípedo retângulo conhecendo as arestas a, b e c.

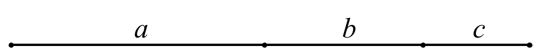


Figura 7

Solução: Sabemos que a diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c é dado por $x = \sqrt{a^2 + b^{2+}c^2}$. Fazendo $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ e, em seguida, $x = \sqrt{y^2 + c^2}$, determinamos x como mostra a figura 8.

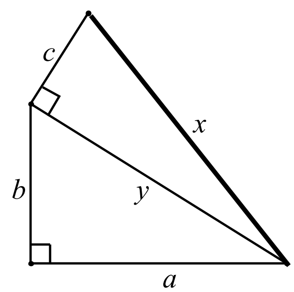


Figura 8

3.3 $a\sqrt{n}$, n natural

Dado um segmento a, podemos construir todos os elementos da sequência $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$, ... pela construção abaixo que é fácil de entender. Observe que, na figura 9, $AA_n = a\sqrt{n}$.

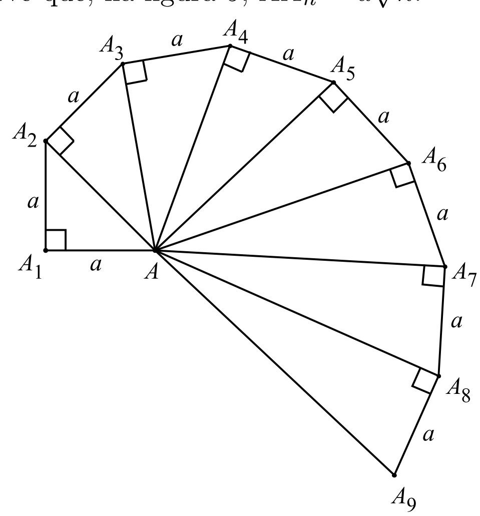


Figura 9

Entretanto, quando n é grande, podemos buscar um caminho mais curto. Veja o problema seguinte.

Problema 18.

Dado o segmento a construir o segmento $x = a\sqrt{21}$.

Solução: Pesquisando um pouco, podemos perceber que a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos $4a$ e $2a$ é:

$$y = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{16a^2 + 4a^2} = \sqrt{20a^2} = a\sqrt{20}.$$

Assim, com mais um passo, chegamos a $x = a\sqrt{21}$.

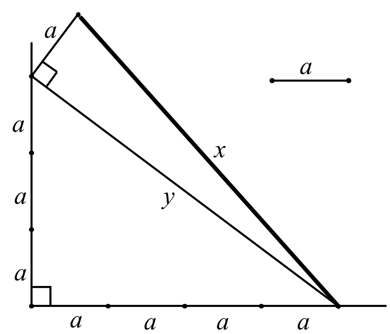


Figura 10

3.4 A Média Geométrica

Dados dois segmentos a e b, definimos a sua *média aritmética* por $m = \dfrac{a+b}{2}$ e sua *média geométrica* por $g = \sqrt{ab}$.

Para construir a média geométrica precisamos recordar duas das relações métricas no triângulo retângulo.

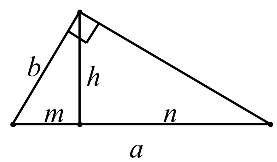


Figura 11

As relações que utilizaremos são $h^2 = mn$ e $b^2 = am$. A primeira ($h = \sqrt{mn}$) significa que a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa e, a segunda ($b = \sqrt{am}$), que um cateto é média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela. Assim, podemos construir a média geométrica de duas formas.

Construímos sobre uma reta os segmentos $AH = a$ e $HB = b$. Traçando a mediatriz de AB encontramos seu ponto médio (O) e traçamos uma semicircunferência de centro O e diâmetro AB. A perpendicular a AB traçada por H determina o ponto C na semicircunferência. Desta forma, CH é a média geométrica entre a e b, ou seja, $CH = g = \sqrt{ab}$.

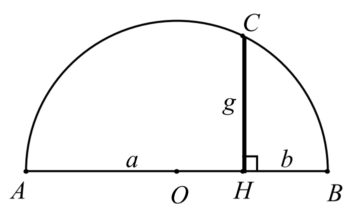


Figura 12

A outra forma de construir consiste em desenhar o segmento $AB = a$ e, sobre ele, assinalar o ponto H tal que $AH = b$. Traçamos então a semicircunferência de diâmetro AB e, por H, a perpendicular a AB que determina o ponto C sobre a semicircunferência. Desta forma, AC é a média geométrica entre a e b, ou seja, $AC = g = \sqrt{ab}$.

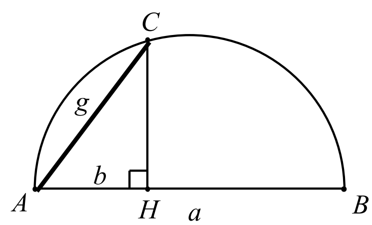


Figura 13

Problema 19.

Dados os segmentos a e b encontre os segmentos x e y tais que:

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b^2 \end{cases}$$

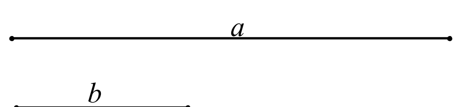


Figura 14

Solução: Sobre uma reta r assinale um segmento $AB = a$, encontre seu ponto médio e trace a semicircunferência de diâmetro AB.

Assinale um ponto P sobre r, trace por P uma perpendicular a r e sobre ela construa o segmento $PQ = b$. A paralela a r traçada por Q determina o ponto C sobre a semicircunferência. A perpendicular à r traçada por C determina o ponto H interior a AB. Os segmentos $AH = x$ e $HB = y$ são tais que $x + y = a$ e $xy = b^2$.

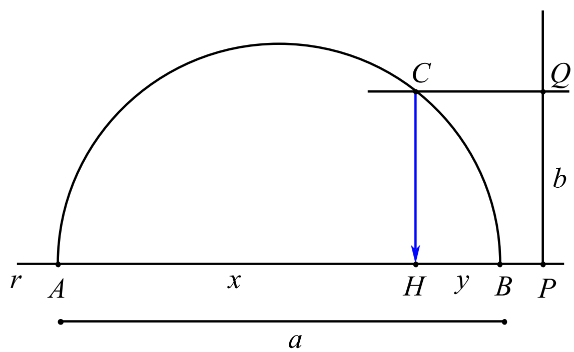
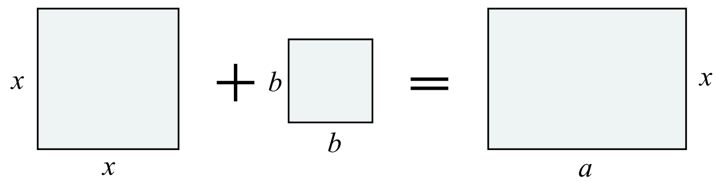


Figura 15

3.5 A Equação do Segundo Grau

A equação do segundo grau que era construída ainda na antiguidade tinha a forma $x^2 + b^2 = ax$ onde a e b são segmentos dados. O significado era encontrar (com régua e compasso) um segmento x tal que a área do quadrado de lado x somada com a área do quadrado de lado b seja igual à área de um retângulo de base a e altura x.



Depois disso, problemas de natureza variada, conduziam a equações do segundo grau onde os coeficientes já eram representados por números, mas estava ainda muito longe a notação que usamos hoje. Por exemplo, a equação $x^2 - 6x + 8 = 0$ era, ainda no século XV, escrita como *census et* 8 *demptis* 6 *rebus* (isto é latim). Devemos lembrar que, na antiguidade não existiam números negativos e, cada solução de uma equação era certo segmento de reta (cujo equivalente hoje é sua medida que é um número positivo).

A equação básica $\quad x^2 + b^2 = ax$.

Primeira solução: Com os nossos modernos conhecimentos sabemos que a equação $x^2 + b^2 = ax$ é a mesma que $x^2 - ax + b^2 = 0$ e suas raízes são dadas por

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}.$$

O radical $r = \sqrt{a^2 - (2b)^2}$ é um cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a e o outro cateto $2b$. Naturalmente que, para que o nosso problema tenha solução devemos ter $a^2 - (2b)^2 \geq 0$, ou seja, $a \geq 2b$. Supondo esta hipótese e estando construído o radical r, as raízes da equação são:

$$x_1 = \frac{a}{2} - \frac{r}{2} \qquad e \qquad x_2 = \frac{a}{2} + \frac{r}{2}.$$

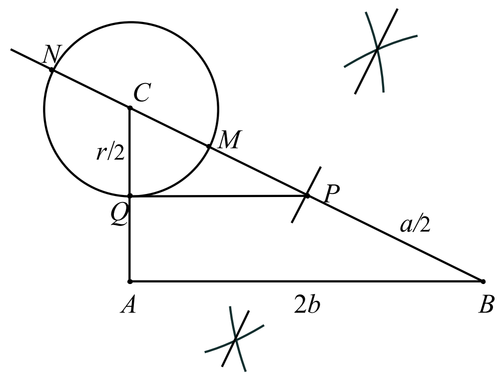


Figura 16

Na figura 16, o triângulo ABC, retângulo em A foi construído com $AB = 2b$ e $BC = a$ obtendo-se $AC = r$. Pelo ponto P, médio de BC traçamos PQ paralela a AB para obter $CQ = \dfrac{r}{2}$. A circunferência de centro C e raio CQ determina na reta BC os pontos M e N. Veja que $PM = \dfrac{a}{a} - \dfrac{r}{2} = x_1$ e que $PN = \dfrac{a}{2} + \dfrac{r}{2} = x_2$.

O problema está resolvido.

Segunda solução: Podemos imaginar uma solução diferente para a solução da equação básica $x^2 + b^2 = ax$. Inicialmente, vamos escrevê-la na forma $x^2 - ax + b^2 = 0$ e lembremos que a e b são segmentos dados. O que sabemos sobre as raízes desta equação? Se x_1 e x_2 são as raízes, conhecemos as propriedades da soma e do produto:

$x_1 + x_2 = a$ e $x_1 x_2 = b^2$. O problema passa a ser então o de determinar dois segmentos, conhecendo sua soma e sua média geométrica. Podemos então desenhar uma circunferência de diâmetro $AB = a$ e uma paralela a AB distando b de AB (figura 17). Se $B \leq \dfrac{a}{2}$, essa paralela determinará um ponto C sobre a semicircunferência e a projeção de C sobre AB é o ponto P tal que $AP = x_1$ e $PB = x_2$.

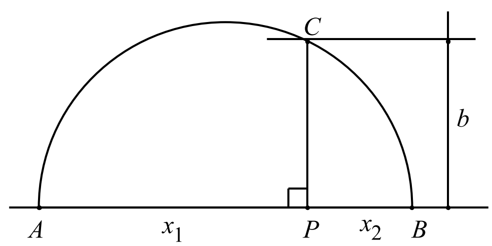


Figura 17

Problema 20.

A figura 18 mostra uma circunferência tangente no ponto T à reta r e um ponto P sobre r. Dado o segmento a, construa por P uma secante PAB tal que $AB = a$.

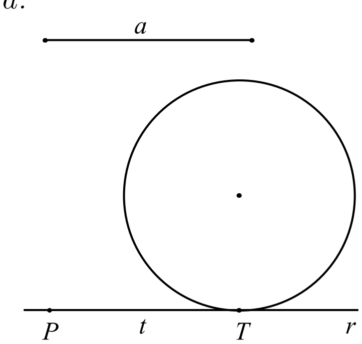
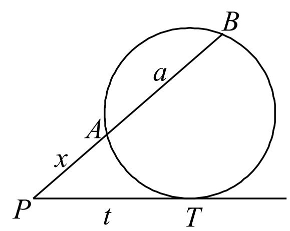


Figura 18

Solução: Inicialmente, observe que um problema muito parecido com este já foi proposto e resolvido no capítulo anterior. Vamos agora resolvê-lo algebricamente. Suponhamos o problema resolvido e seja $PA = x$.



Utilizando o conceito de potência de um ponto em relação a uma circunferência temos $PA \cdot PB = PT^2$, ou seja, $x(x + a) = t^2$. Para encontrar o valor de x devemos resolver a equação $x^2 + ax - t^2 = 0$. Usando a fórmula de resolução da equação do segundo grau temos que:

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4t^2}}{2}.$$

Arrumando ligeiramente esta fórmula, temos $x = \dfrac{\sqrt{a^2 + (2t)^2} - a}{2}$. Ora o radical $r = \sqrt{a^2 + (2t)^2}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são a e $2t$. O resto é fácil e a construção está a seguir. Uma vez determinado o segmento x, basta traçar uma circunferência centro P e raio x para determinar o ponto A na circunferência.

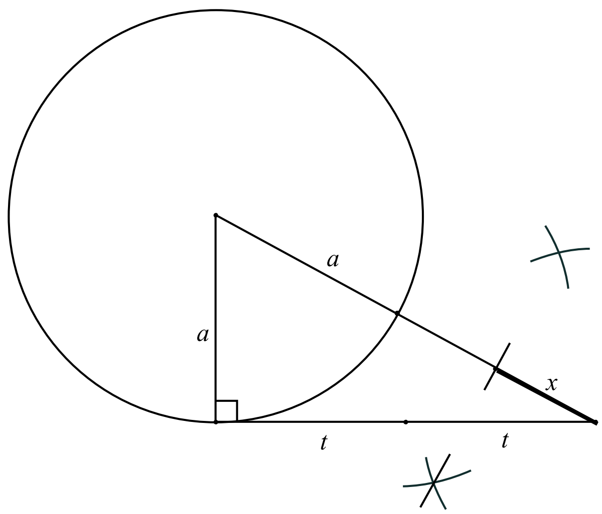


Figura 19

3.6 Expressões Homogêneas

Todas as expressões algébricas que apareceram até agora são homogêneas, ou seja, o resultado não depende da unidade de medida utilizada nos segmentos. Por exemplo, se a é um segmento de 3,6 cm e b é um segmento de 4,2 cm, podemos construir o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ como hipotenusa do triângulo retângulo de catetos a e b, e este segmento x é independente da unidade em que a e b foram medidos. Por outro lado, podemos perfeitamente olhar para a fórmula $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ de forma numérica, ou seja, podemos pensar que x é o resultado do cálculo $x = \sqrt{3{,}6^2 + 4{,}2^2} \simeq 5{,}53$. No exercício a seguir, dados os segmentos a e b, vamos determinar o segmento x tal que $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. É claro que, se pensarmos nos segmentos a e b, esta expressão não faz o menor sentido, mas se pensarmos que a e b são os números que medem esses segmentos em alguma unidade, faz total sentido perguntar que segmento tem a medida igual a x. O curioso e, muito importante, é que esse segmento é sempre o mesmo, independente da unidade em que a e b foram medidos.

Como reconhecer expressões homogêneas?

Uma expressão envolvendo segmentos a, b, c, $\ldots$ é homogênea se, quando multiplicamos cada um deles por um número $k > 0$, o resultado fica multiplicado por k.

Isto significa que o resultado é independente da escala, ou seja, com qualquer tipo de régua utilizada para medir os segmentos dados, o resultado é sempre o mesmo.

Problema 21.

Dados os segmentos a e b, determine o segmento x tal que $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Solução: Fazendo as contas encontramos $x = \dfrac{ab}{a+b}$. Observe que esta relação pode ser escrita na forma $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{b}{x}$, o que mostra que x é a quarta proporcional entre os segmentos $a+b$, a e b. A construção natural está na figura 20.

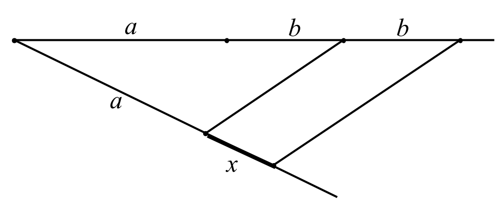


Figura 20

3.7 Construções com Segmento Unitário

Se a é um segmento então o símbolo $\sqrt{a}$ não tem significado geométrico. Mesmo se pensarmos que a representa a medida de um segmento em certa unidade, não podemos entender, a princípio, o que significa o símbolo $\sqrt{a}$. Se em certa unidade (u) o segmento a mede 4, então $\sqrt{a}$ deve ser igual a 2. Entretanto, se outra régua estiver graduada na unidade $v = 4u$ então o segmento a mede 1 e, consequentemente, $\sqrt{a}$ deve ser também igual a 1.

Estas reflexões mostram que, na expressão $x = \sqrt{a}$ (que não é homogênea), para representar x como um segmento precisamos saber em que unidade o segmento a foi medido. Entretanto, se estabelecermos um segmento unitário $(u = 1)$ que será usado para medir todos os outros segmentos do problema, podemos interpretar a expressão $x = \sqrt{a}$, como $x = \sqrt{a \cdot 1}$, ou seja, x é a média geométrica entre a e o segmento unitário.

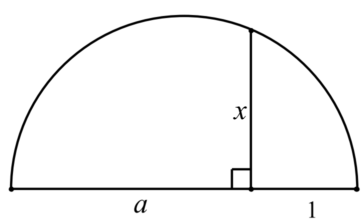


Figura 21

Utilizando um segmento unitário $(u = 1)$, dado um segmento a podemos construir $x = a^2$. Esta relação pode ser escrita como $\dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{x}$, ou seja, x é a quarta proporcional entre u, a e a.

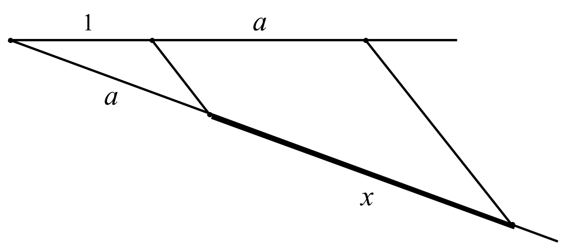


Figura 22

Outra construção de $x = a^2$ utiliza a relação do triângulo retângulo que diz que o quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção sobre ela. Veja a figura 23.

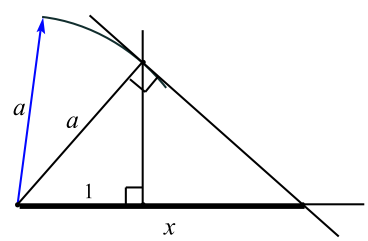
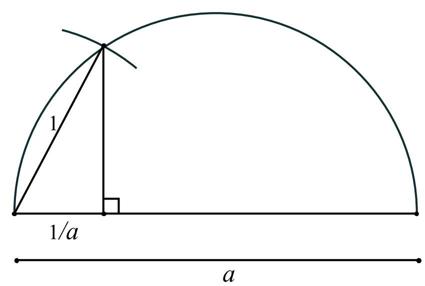


Figura 23

A mesma relação utilizada nesta última construção pode ser utilizada para construir $x = \dfrac{1}{a}$ onde a é um segmento dado. Aqui, a unidade é a média geométrica entre x e a.



Em cada um dos exercícios propostos, procure observar se a expressão dada é homogênea. Se for, imagine a construção independente de unidade. Em caso contrário, estabeleça um segmento unitário a sua escolha.

Problemas Propostos

1) Dados os segmentos a, b, c, d, e (a sua escolha) construa $x = \dfrac{abc}{de}$.

2) Dados os segmentos a e b (a sua escolha) construa $x = \sqrt{a^2 + 3b^2}$.

3) Dado o segmento a construa $x = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

4) Construa um segmento de comprimento $\sqrt{5{,}8}$ centímetros.

5) Dados os segmentos a e b (a sua escolha) construa $x = \dfrac{a^2}{b}$.

6) Dados os segmentos a e b do exercício anterior construa $x = \dfrac{a}{b}$.

7) Dados os segmentos a, b, c, d, (a sua escolha) construa

$$x = \frac{a^2 + bc}{d}.$$

8) Dados os segmentos a e b (a sua escolha) resolva o sistema

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b^2 \end{cases}$$

Determine que relação deve existir entre a e b para que o problema tenha solução.

9) Dados os segmentos a e b (a sua escolha) resolva o sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases}$$

Determine que relação deve existir entre a e b para que o problema tenha solução.

10) Dados $a = 3$ e $b = 2{,}6$ resolva a equação $x^2 - ax - b^2 = 0$.

11) Dados os segmentos a e b (a sua escolha) construa x tal que

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

12) Construir o triângulo retângulo conhecendo a soma dos catetos $s = 8\,\text{cm}$ e a altura relativa à hipotenusa $h = 2{,}6\,\text{cm}$.

13) Desenhe uma circunferência e assinale um ponto P exterior. Trace por P uma secante PAB de forma que se tenha $PA = AB$.

14) A média harmônica entre dois segmentos a e b é o segmento h tal que $h = \dfrac{2ab}{a+b}$. Desenhe os segmentos $a = 4{,}8\,\text{cm}$ e $b = 2{,}6\,\text{cm}$, e construa a média harmônica deles.

15) Considere um segmento AB e um ponto C interior (mais próximo de B do que de A). Dizemos que AC é o *segmento áureo* de AB quando $\dfrac{CB}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$.

    (a) Desenhe um segmento AB qualquer e construa o seu segmento áureo.

    (b) Qual é o valor da razão $\dfrac{AC}{AB}$?

16) Desenhe uma circunferência de $3\,\text{cm}$ de raio e inscreva nela um retângulo de $16\,\text{cm}$ de perímetro.

17) Desenhe uma circunferência C e uma reta tangente t. Construa um quadrado que tenha dois vértices sobre t e dois vértices sobre C.

18) Construa o trapézio isósceles circunscritível sabendo que suas bases medem $2{,}2\,\text{cm}$ e $5{,}4\,\text{cm}$.

19) Desenhe um quadrado de qualquer tamanho. Construa um octógono regular cortando os “cantos” desse quadrado.

20) São dados dois pontos A e B de um mesmo lado de uma reta r. Determine o ponto P da reta r de forma que o ângulo APB seja máximo.

21) São dados os pontos A e B e um segmento k. Construa o lugar geométrico dos pontos P tais que $PA^2 + PB^2 = k^2$.

22) Dados os segmentos a e b, e o segmento unitário $u = 1$ construa $x = ab$.

23) Dados os segmentos a,b e c e o segmento unitário $u = 1$ construa $x = \sqrt{abc}$.

24) Dado o segmento a, e o segmento unitário $u = 1$, construa $x = \sqrt[4]{a}$.

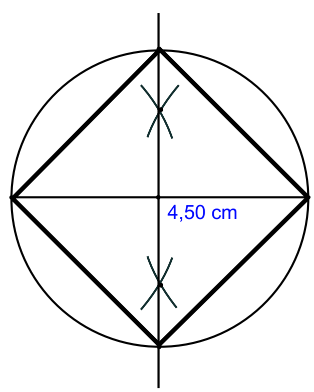
25) (OBM) Dados os segmentos a e b construa $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

Capítulo 4

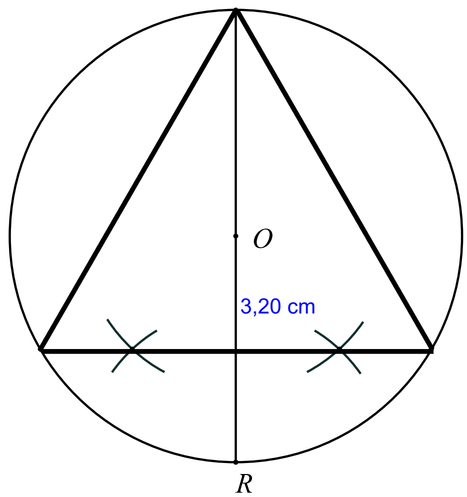
Soluções dos Exercícios Propostos

Capítulo 2 - Lugares Geométricos

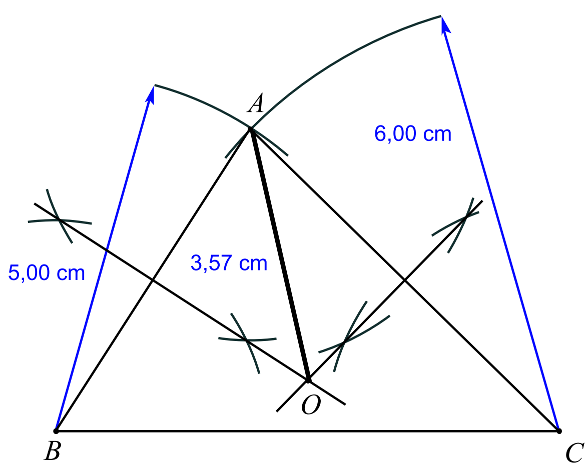
1)



2)

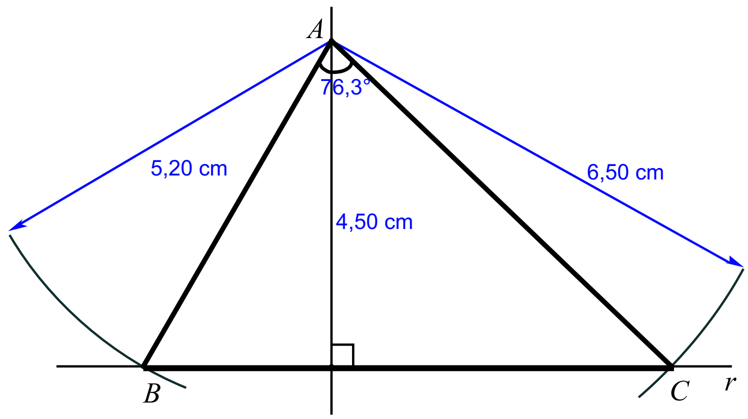


3)

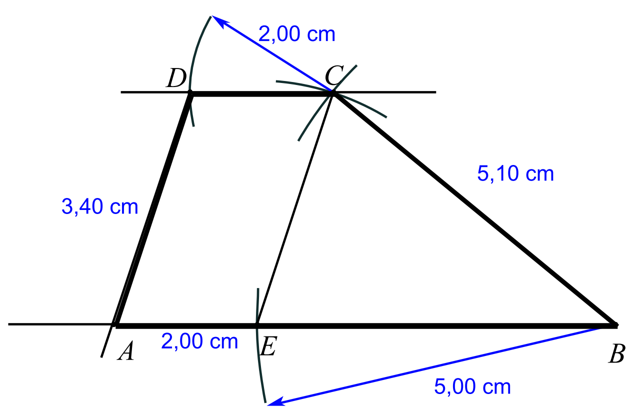


"construcciones*g
2009/8/12
page 66
Estilo OBMEP

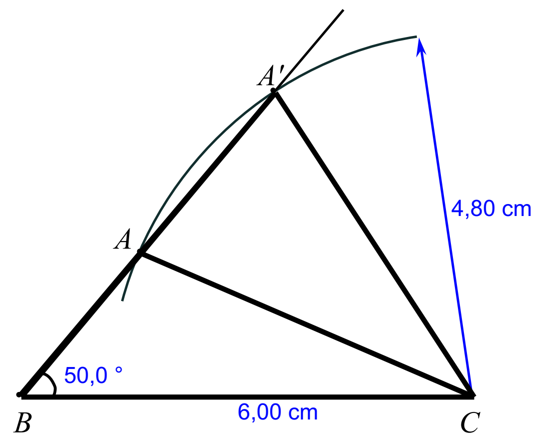
4)



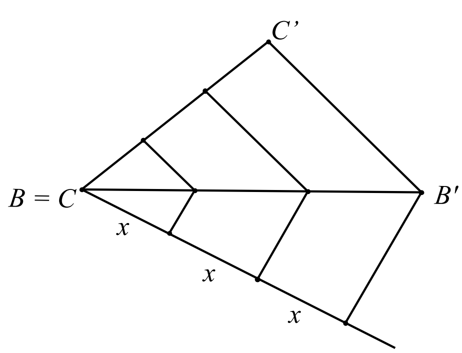
5)

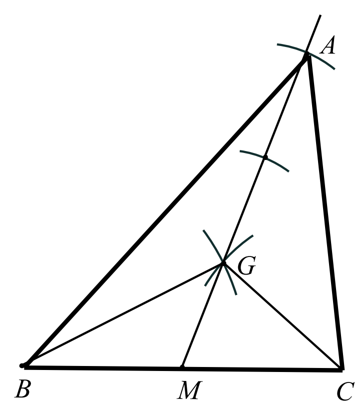


6)

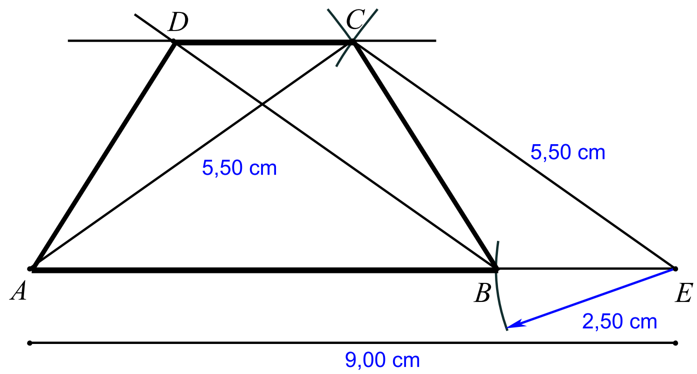


7)

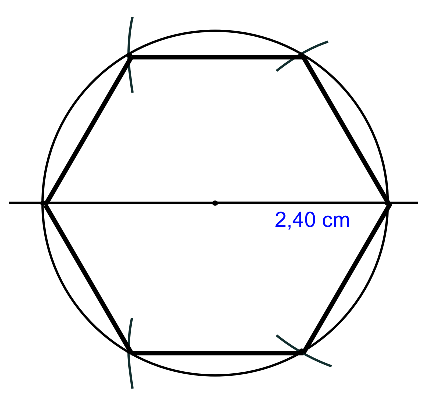




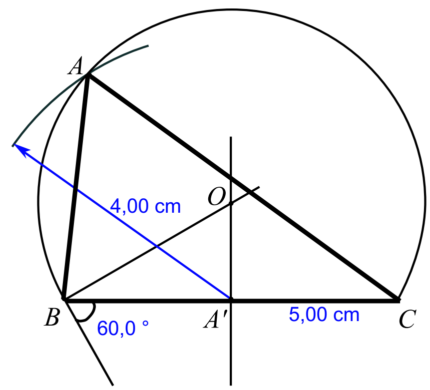
8)



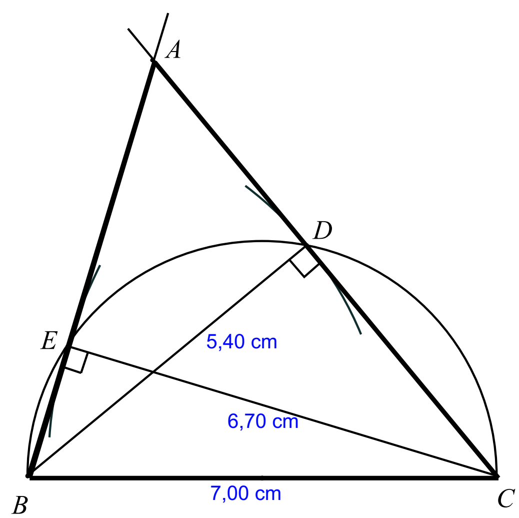
9)



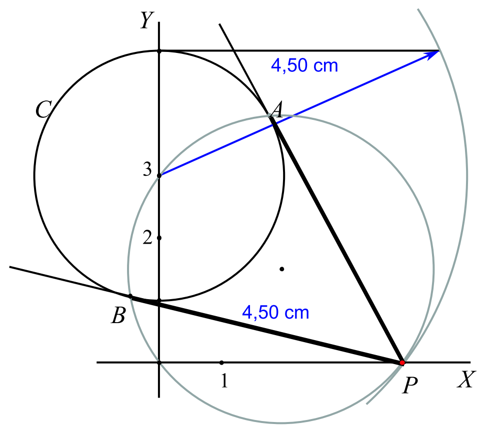
10)



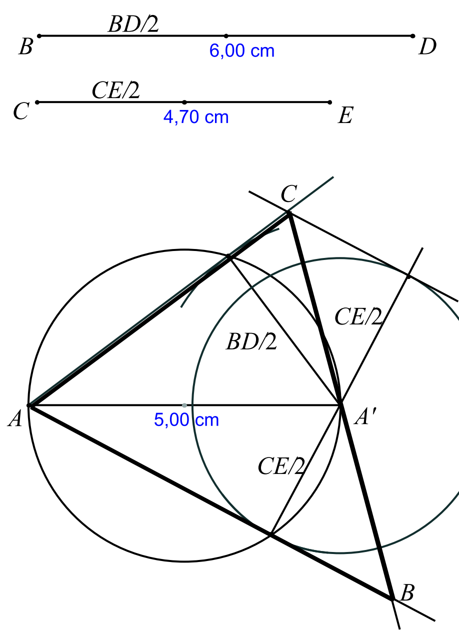
11)



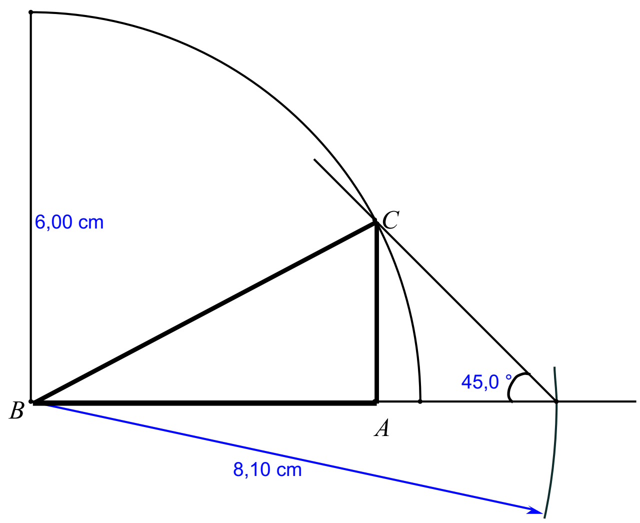
12)


Y
4,50 cm
C
A
3
2
B
4,50 cm
1
P
X

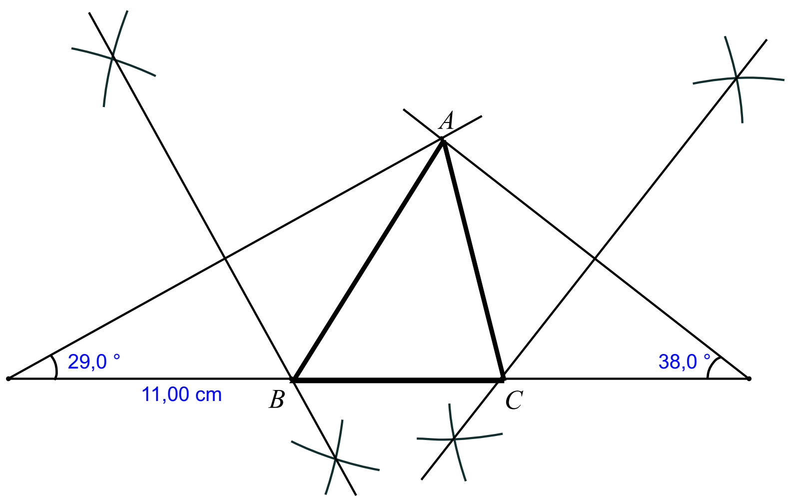
13)


BD/2
B
6,00 cm
D
CE/2
C
4,70 cm
E
C
CE/2
BD/2
A
5,00 cm
A′
CE/2
B

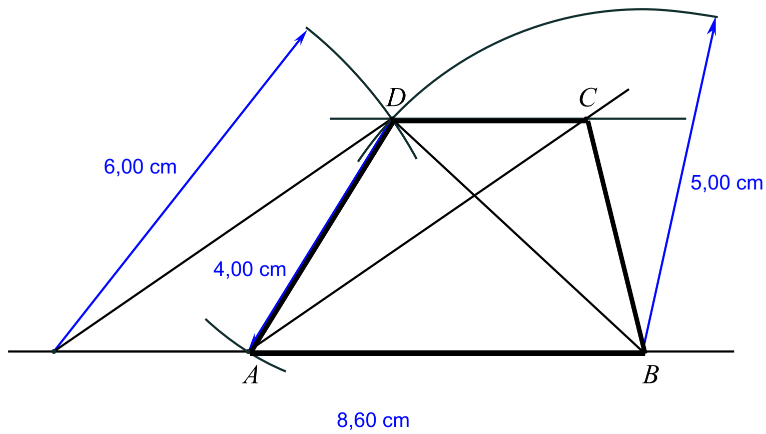
14)



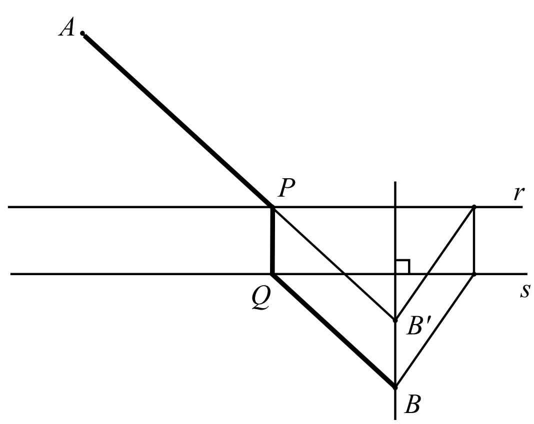
15)



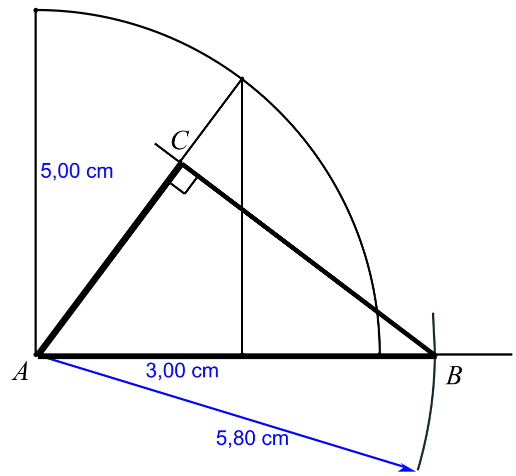
16)



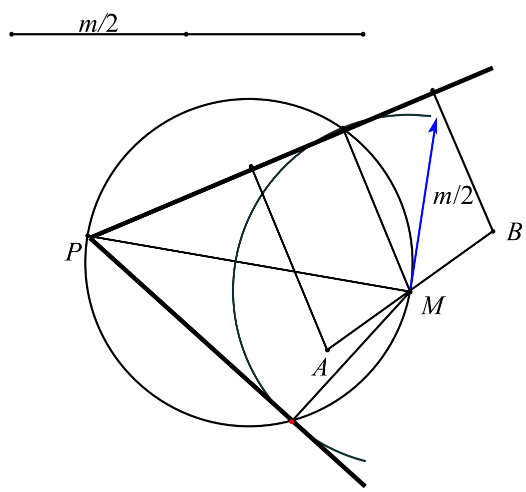
17)



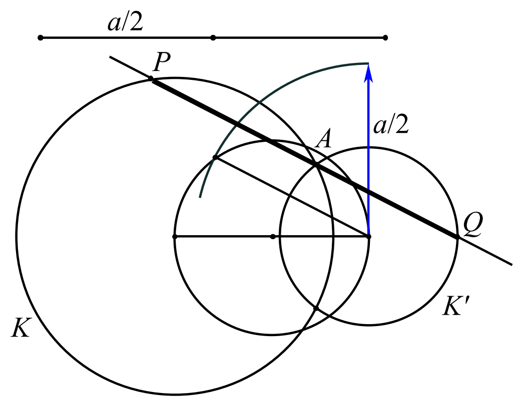
18)



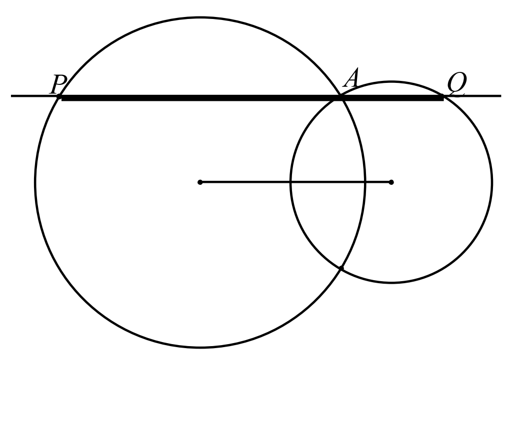
19)



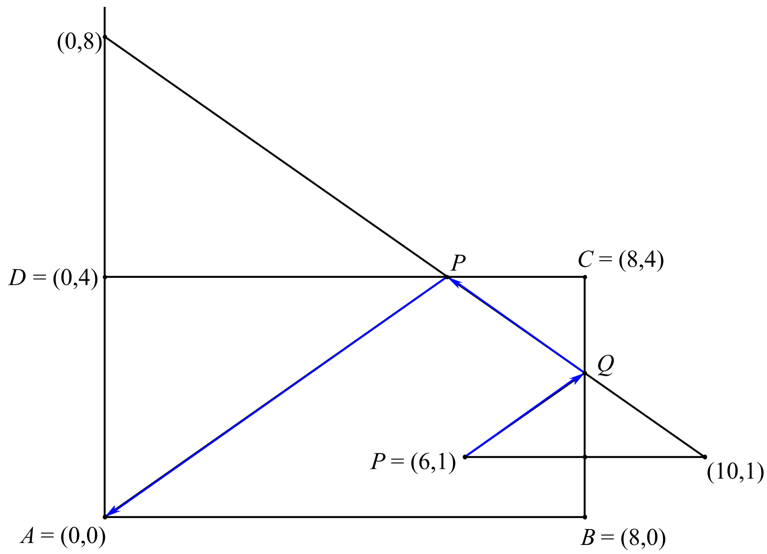
20)



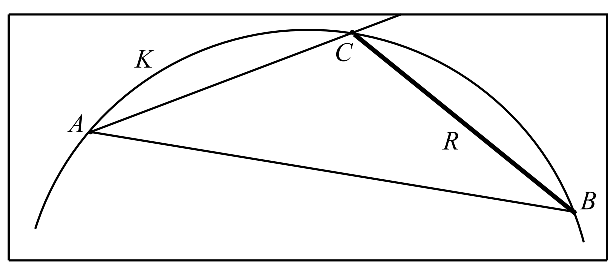
21)



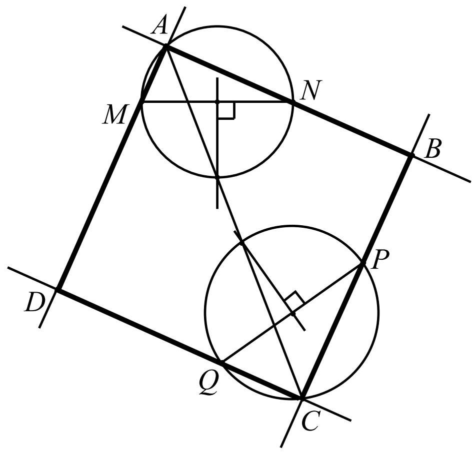
22)



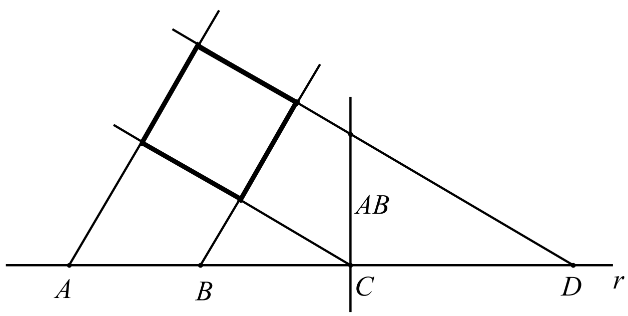
23)



24)



25)

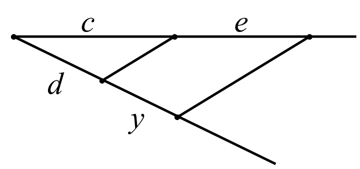


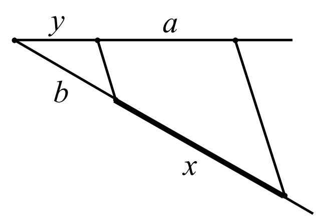
Capítulo 3 - Expressões Algébricas

1) $\dfrac{de}{bc} = \dfrac{a}{x}$

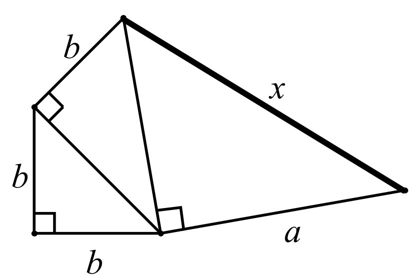
$\dfrac{de}{c} = y \Rightarrow \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{y}$

$\dfrac{y}{b} = \dfrac{a}{x}$

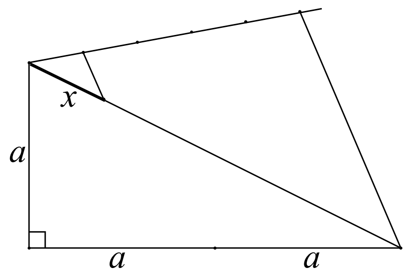




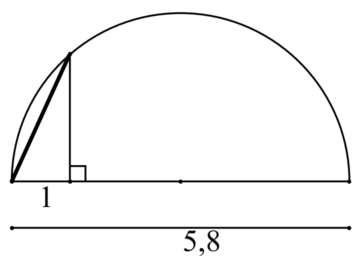
2)



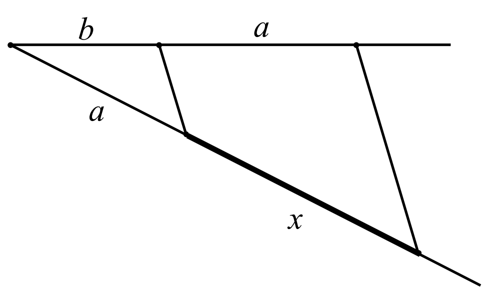
3)



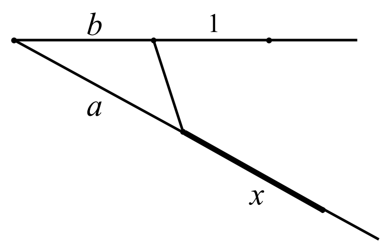
4)



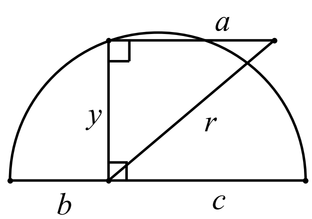
5) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{x}$

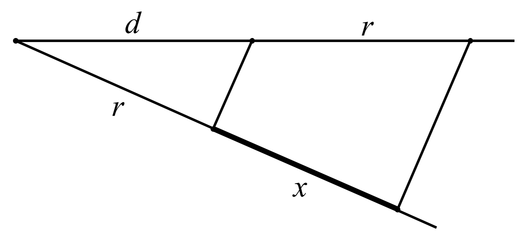


6) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{x}$



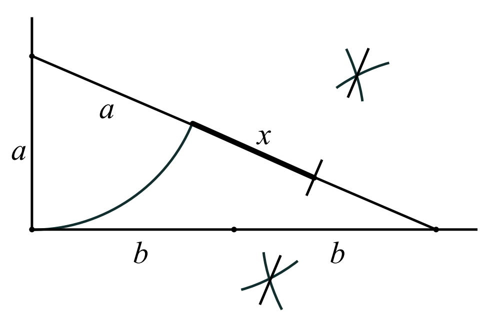
7) Seja y tal que $y^2 = bc$. Seja r tal que $r = \sqrt{a^2 + y^2}$.
Então $x = \dfrac{r^2}{d}$ ou $\dfrac{d}{r} = \dfrac{r}{x}$.



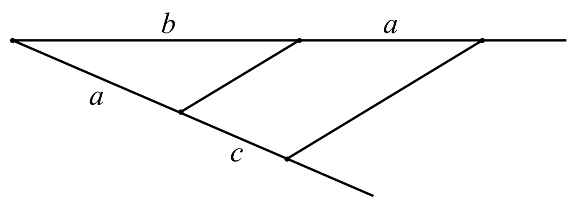


8) $x = y + a$
$(y + a)y = b^2$
$y^2 + ay - b^2 = 0.$
A raiz positiva é

$$y = \frac{-a + \sqrt{a^2 + (2b)^2}}{2}.$$

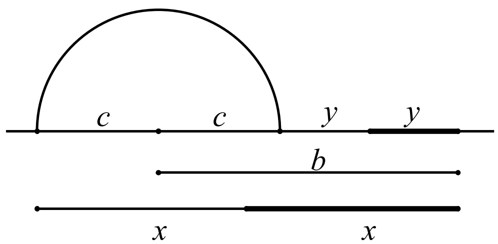


9) $(x+y)(x-y)=a^2$



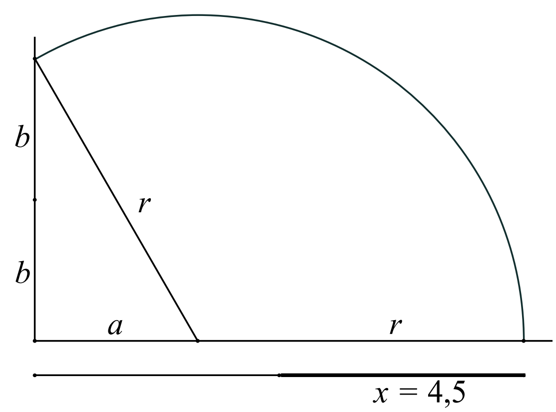
$$x-y=\frac{a^2}{b}=c$$

(construção auxiliar)



$$\left\{\begin{array}{l} x+y=b \\ x-y=c \end{array}\right. \Longrightarrow x=\frac{b+c}{2} \text{ e } y=\frac{b-c}{2}.$$

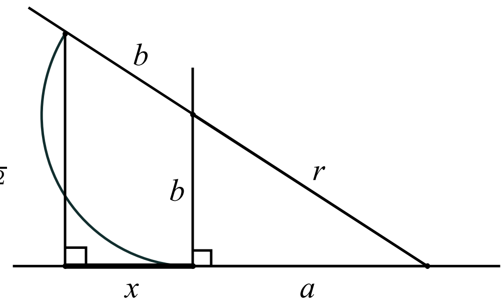
10) $$x=\frac{a+\sqrt{a^2+(2b)^2}}{2}.$$



11)
$$\frac{1}{x^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$
$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.$$

Construindo $r = \sqrt{a^2+b^2}$ temos:

$$\frac{r}{a} = \frac{b}{x}.$$



12) $b + c = s$

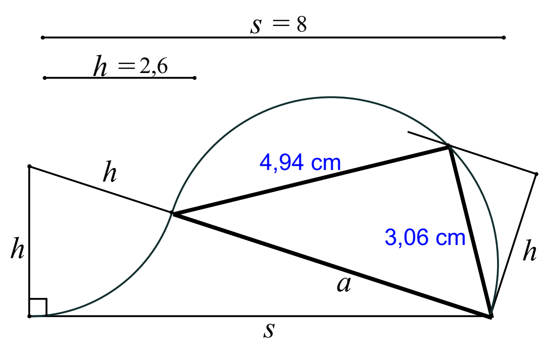
$b^2 + c^2 + 2bc = s^2$

$a^2 + 2ah = s^2$

$a^2 + 2ah - s^2 = 0$

$a = \dfrac{-2h + \sqrt{4h^2 + 4s^2}}{2}$

$a = -h + \sqrt{h^2 + s^2}$



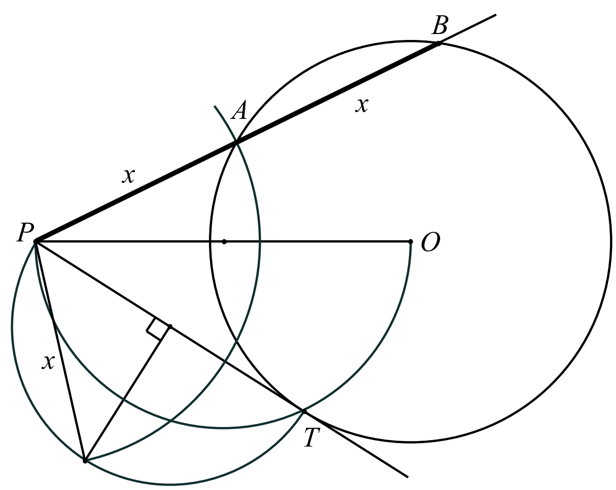
13) Seja r o raio e $PO = d$. Usando o conceito de potência de um ponto em relação a uma circunferência temos:

$$x \cdot 2x = d^2 - r^2$$

$$x\sqrt{2} = \sqrt{d^2 - r^2}$$

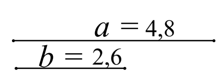
$$\sqrt{d^2 - r^2} = t$$

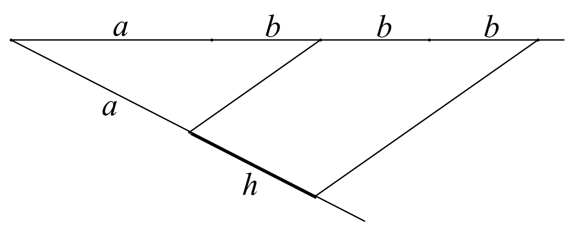
$$x = \frac{t\sqrt{2}}{2}.$$



14) $h = \dfrac{2ab}{a+b}$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{2b}{h}$$



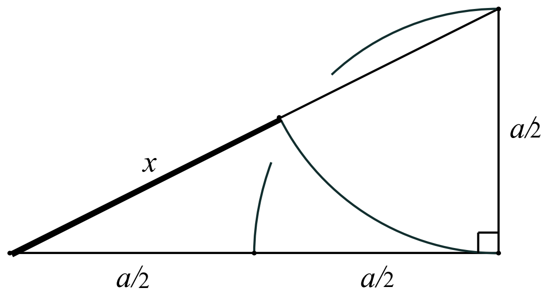


15) $AB = a\,,\ AC = x$

$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

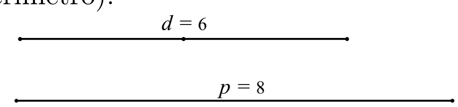
$$x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$$



16) Seja $2r = 6 = d$ (diâmetro).

Seja $a + b = 8 = p$ (semiperímetro).

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = d^2 \\ a + b = p \end{cases}$$

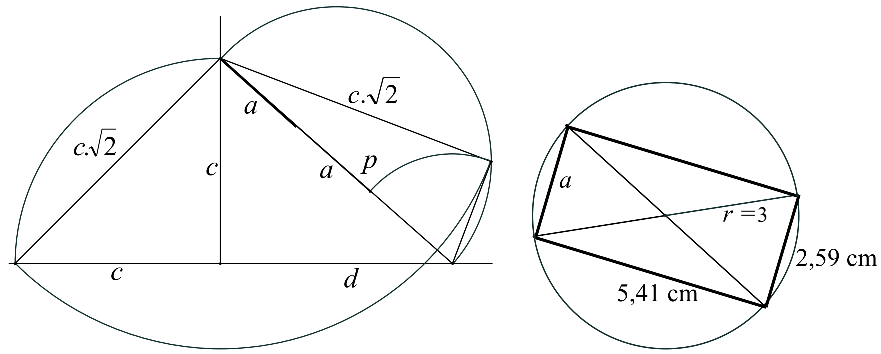


Temos que $b = p-a \Rightarrow a^2+(p-a)^2 = d^2 \Rightarrow 2a^2-2pa+p^2-d^2 = 0$.

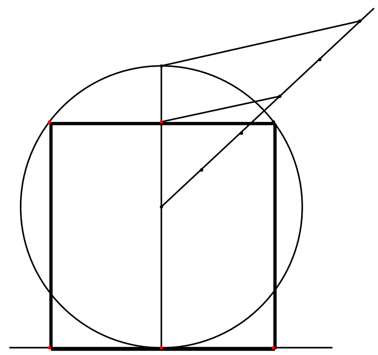
Seja $p^2 - d^2 = c^2$.

Assim,

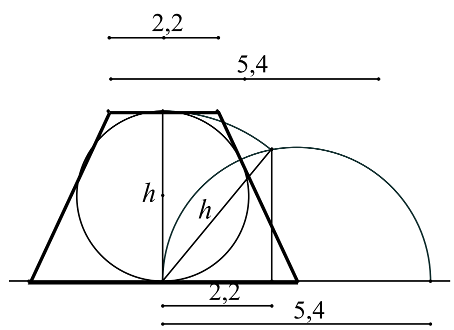
$$2a^2-2pa+c^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{2p-\sqrt{4p^2-8c^2}}{4} \Rightarrow a = \frac{p-\sqrt{p^2-2c^2}}{2}.$$



17) Seja $2x$ o lado do quadrado. Trace pelo centro o diâmetro que passa pelo ponto de tangência e seja r o raio da circunferência dada.
$r^2 = x^2 + (2x - r)^2$
$x = \dfrac{4r}{5} \Rightarrow 2x - r = \dfrac{3r}{5}$.

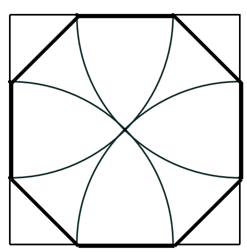


18) Se as bases de um trapézio isósceles circunscritível medem a e b, sua altura é $h = \sqrt{ab}$.

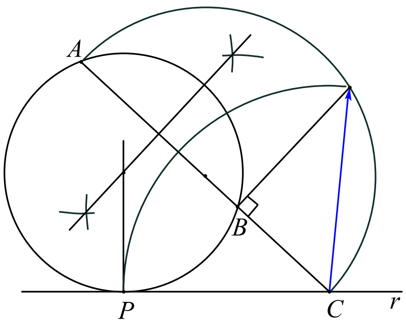


19) Seja a o lado do quadrado. Seja x o tamanho do cateto de cada triângulo.

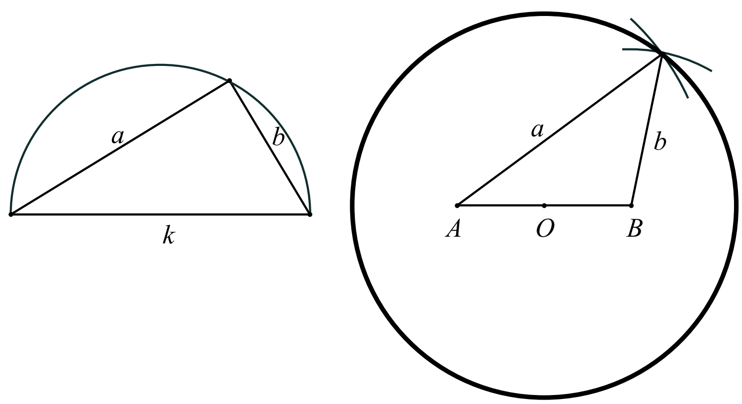
$x + x\sqrt{2} + x = a \Rightarrow x = a - \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



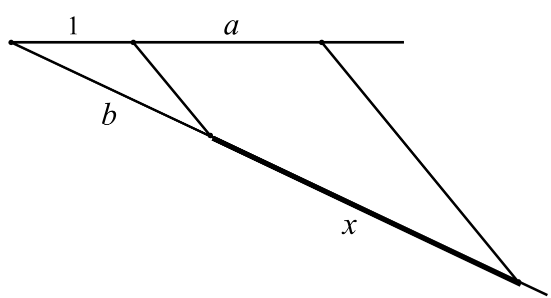
20) Existe uma circunferência que passa por A e B e é tangente a r. O ponto de tangência é o ponto P. Para construir, seja C o ponto onde a reta AB encontra r. Usando potência temos $PT = PA \cdot PB$. Uma construção está a seguir.



21)



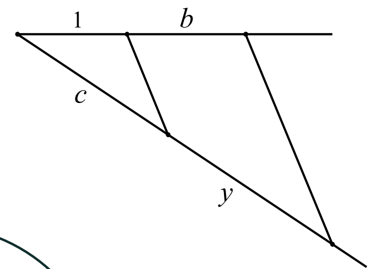
22) $\dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{x}$

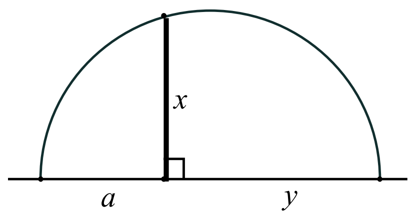


23) $x^2 = abc$

$y = bc \rightarrow \dfrac{1}{c} = \dfrac{b}{y}$

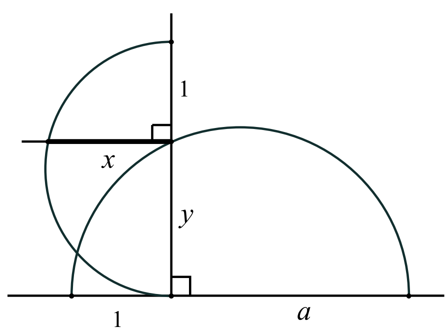
$x^2 = ay.$





24) Seja $y = \sqrt{a}$.

Então $x = \sqrt{y}$.



25) As figuras mostram as construções dos segmentos: $a^2 = m$, $b^2 = n$, $t = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{a^4 + b^4}$ e $x = \sqrt{t} = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

Foi utilizado um segmento unitário, mas como a expressão é homogênea, o segmento x não depende do segmento unitário.