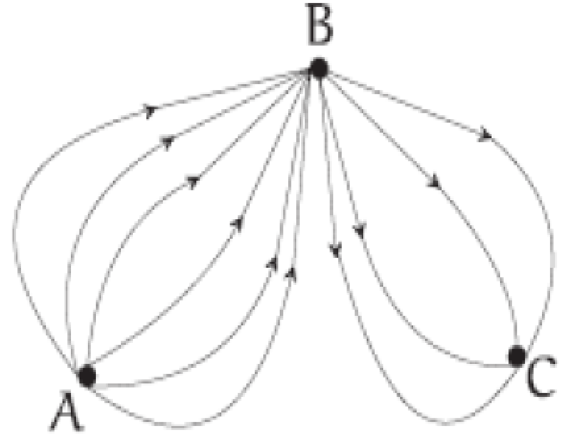
Ciclo 2 – Encontro 1

Permutação simples e Revisão de Principio Aditivo e multiplicativo

Exercício 1

Exercício 1: (Fomin, capítulo 2) No País das Maravilhas existem três cidades A, B e C. Existem seis estradas ligando A a B e quatro estradas ligando B a C. De quantas maneiras é possível dirigir de A



Solução

de A até B existem seis opções de escolha de caminho.

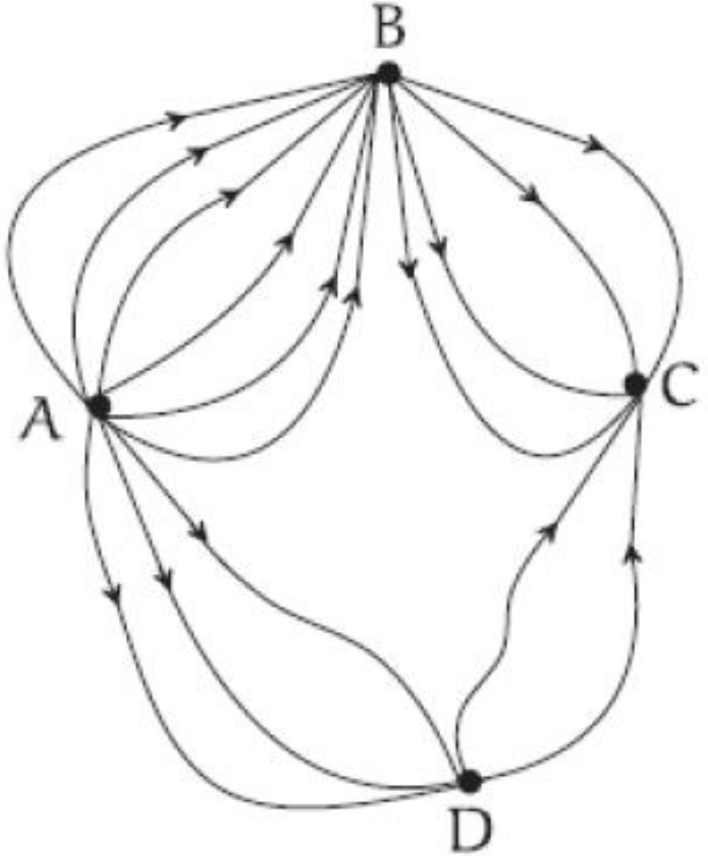
De B até C existem quatro opções de esolha de caminho.

Pra ir de A até C há 6.4=24 caminhos possíveis.

Exercício 2

Exercício 2: (Fomin, capítulo 2) Foram construídas uma cidade nova D e diversas estradas novas no País das Maravilhas. E agora, de quantas maneiras é possível dirigir de A a C?

Exercício 2



Solução

6.4=24

3.2=6

24.6=144

Exercício 3

Exercício 3: (Fomin, capítulo 2) Vamos chamar um número natural de "todo-ímpar" se todos os seus algarismos forem ímpares. Quantos números todo-ímpares de três algarismos existem? E quantos são os números todo-ímpares de três algarismos distintos?

Solução

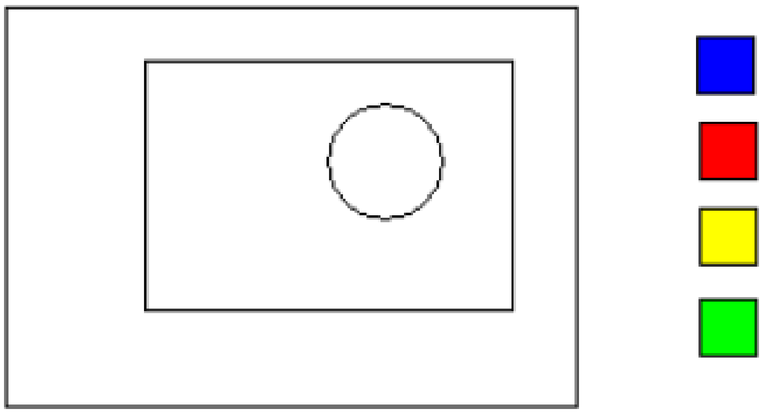
___.___.___

5.5.5=125

5.4.3=60

Exercício 4

Exercício 4: (Apostila 2, exemplo 2, página 4) Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes dentre 4 cores dadas?



Solução

4.3.2=24

Exercício 5

Exercício 5: (Apostila 2, exemplo 3, página 5) Para pintar a bandeira abaixo, há 4 cores disponíveis. De quantos modos ela pode ser pintada de modo que faixas adjacentes tenham cores distintas?

Solução

4.3.3=36

Exercício 6

Exercício 6: Sobre uma mesa estão 5 livros diferentes de matemática, 7 livros diferentes de física e 10 livros diferentes de química. De quantas maneiras diferentes podemos selecionar dois destes livros, com a condição de selecionar livros de matérias diferentes?

Solução

M e F

5.7=35

M e Q

5.10=50

F e Q

7.10=70

M e F ou M e Q ou F e Q

35+50+70=155

Exercício 7

Exercício 7: De quantas maneiras podemos colocar dois carros diferentes em duas das seis vagas de um estacionamento?

Solução

7.6=42

Exercício 8

Exercício 8: Uma sala de aula possui 12 moças (entre elas Ana, Bárbara e Clara) e 10 rapazes (entre eles Daniel e Emerson). De quantas maneiras diferentes podemos formar um casal sabendo que Ana, Bárbara e Clara não podem se juntar nem com Daniel e nem com Emerson?

Solução

Sem os 5 tem

9.8=72

Escolhendo uma das 3

3.8=24

Escolhendo com os 2

9.2=18

72+18+24=114

Exercício 9

Exercício 9: Deseja-se formar uma fila de três alunos escolhidos de uma sala com 8 meninas e 10 meninos. De quantos modos essa fila pode ser formada se as duas primeiras pessoas da fila são do mesmo sexo e a última pessoa da fila do outro sexo?

Solução

10.9.8=720

8.7.10=560

720+560=1280

Exercício 10

Exercício 10: (Apostila 2, exemplo 4, página 6) Quantos são os números de três algarismos distintos?

Solução

9.9.8=648

Exercício 11

Exercício 11: (Apostila 2, exemplo 6, página 8) Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

Solução

I.P.P

5.5.4=100

P.I.P

4.5.4=80

I.I.P

5.4.5=100

P.P.P

4.4.3=48

100+100+80+48=328

Fatorial e Permutação simples

Seja n um número natural, denota-se o fatorial de n por n!, que se define da seguinte forma:

n!= o produto de todos os números inteiros de 1 até n, se n>=2 , se n=0 ou n=1 o fatorial é igual a 1

0!=1

1!=1

2!=2.1

3!=3.2.1

4!=4.3.2.1

Fatorial e Permutação simples

$\mathbf{P_n}$=n! é o número de maneiras de dispor n objetos distintos em fila.

$\mathbf{P_1}=1!=1$

$\mathbf{P_2}=2!=2.1=2$

Exercício 12

Exercício 12: De quantas formas se pode dispor 4 pessoas em fila indiana?

Solução

$4!=4.3.2.1=24$

Solução

Exercício 13

Exercício 13: Quantos são os anagramas da palavra MATRIZ?

Solução

$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

Exercício 14

Exercício 14: Considerando a palavra MATRIZ, determine o número de anagramas que:

a) Começam por MA.
b) Tenham as letras M e A juntas, nessa ordem.
c) Tenham as letras M e A juntas.

Solução

a)4.3.2.1=4!=24

b)5.4.3.2.1=5!=120

c)5.4.3.2.1=5!=120.2.1=240

Exercício 15

Exercício 15: De quantas maneiras podemos ordenar 5 objetos lado a lado?

Solução

$5.4.3.2.1 = 5! = 120$

Exercício 16

Exercício 16: De quantas maneiras Aline, Bernardo e Carolina podem formar uma fila?
E se incluirmos o Daniel na fila?

Solução

3.2.1=6

4.3.2.1=24

Exercício 17

Exercícios 17: De quantas maneiras 6 moças e 6 rapazes podem formar pares para uma dança?

Solução

$6.6=36$

Exercício 18

Exercícios 18: De quantas maneiras podemos colocar 6 homens e 6 mulheres em fila alternando sempre H-M-H-M-H-...? E para *n* homens e *n* mulheres?

Solução

$5!.5!=14400$

$n!\ .\ n!$

Exercício 19

Exercício 19: (OBMEP 2012 - N2Q16 – 1ª fase) Quantos são os números naturais entre 0 e 999 nos quais aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3?

(a) 192
(b) 204
(c) 217
(d) 225
(e) 254

Solução

de um algarismo tem apenas uma opção

1

De dois algarismos tem

1.10=9

9.1-1=8

De três algarismos 1.10.10=100

10.1.10-10=90

10.10.1-10=90

280

Solução

QUESTÃO 16
ALTERNATIVA C

Podemos pensar nos números naturais entre 0 e 999 como sequências de três algarismos de 000 até 999. Estamos interessados em contar as sequências em que aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3. Para fazer essa contagem, vamos chamar de a o número de sequências em que não aparece o algarismo 3. Essas sequências se dividem em dois tipos: aquelas em que não aparece o algarismo 2 e aquelas em que aparece pelo menos um algarismo 2; denotamos por b e c, respectivamente, o número dessas últimas sequências. Temos claramente $a = b + c$ e queremos calcular $c = a - b$; basta então calcular a e b. Mas é imediato que $a = 9 \times 9 \times 9$ (não podemos usar o 3, logo sobram 9 algarismos) e $b = 8 \times 8 \times 8$ (não podemos usar o 2 e o 3, logo sobram apenas 8 algarismos). Logo $c = 9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 729 - 512 = 217$.

$$a = b + c: \quad \textit{sequências sem 3} = \textit{sequências sem 3 e sem 2} + \textit{sequências sem 3 e com 2}$$

$$c = a - b: \quad \textit{sequências sem 3 e com 2} = \textit{sequências sem 3} - \textit{sequências sem 3 e sem 2}$$

Exercício 20

Exercício 20: (OBMEP 2012 - N1Q5 – 2ª fase) Vítor tem 24 cartões, sendo oito azuis, oito brancos e oito verdes. Para cada cor, ele numerou os cartões de 1 a 8.

(A) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões azuis de modo que a soma de seus números seja igual a 9?
(B) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?
(C) De quantas maneiras Vítor pode escolher 3 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

Solução

a) O número 9 pode ser escrito como soma de duas parcelas inteiras de quatro maneiras diferentes: $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$. Como a ordem em que os cartões são escolhidos não altera sua soma, segue que Vítor pode escolher dois cartões azuis cujos números somam 9 de 4 maneiras diferentes.

Solução

b) *1ª solução:* Podemos escrever 9 como soma de dois números de 1 a 8 de 4 maneiras: $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$. No caso de cartões com a mesma cor, escolhemos uma das expressões de 9 como soma e depois a cor dos cartões; como as cores são em número de 3, isso pode ser feito de $4 \times 3 = 12$ maneiras. No caso de cartões de cores diferentes, escolhemos uma das expressões de 9, a cor de um dos cartões e uma cor diferente para o outro cartão; isso pode ser feito de $4 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras diferentes. No total, é possível escolher dois cartões cuja soma seja 9 de $12 + 24 = 36$ maneiras diferentes.

2ª solução: Para fazer uma escolha possível, Vitor deve pegar um par de cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9. Os números desses cartões podem ser escolhidos de 4 maneiras diferentes, como vimos no item anterior. Para cada um desses pares, a cor do cartão com o menor número pode ser escolhida de 3 maneiras diferentes, bem como a cor do cartão com o maior número; no total, as cores dos cartões de um par podem ser escolhidas de $3 \times 3 = 9$ maneiras diferentes. Como são 4 pares, o número total de escolhas é $4 \times 9 = 36$.

Solução

c) *1ª solução:* Há três casos a considerar.

- *Os três cartões têm a mesma cor:* as possibilidades para que sua soma 9 seja são $9=1+2+6=1+3+5=2+3+4$; como são 3 cores, o número de possiblidades nesse caso é $3\times 3=9$.
- *Dois cartões de uma cor e o terceiro de uma cor diferente:* os dois cartões da mesma cor somam de 3 a 8; as possibilidades são aqui $3=1+2$, $4=1+3$, $5=1+4=2+3$, $6=1+5=2+4$, $7=1+6=2+5=3+4$ e $8=1+7=2+6=3+5$, num total de 12 possibilidades; em qualquer caso, para completar a soma 9, o terceiro cartão pode ser escolhido de uma única maneira. Para as cores, temos 3 possibilidades para os cartões de mesma cor e 2 para o de cor diferente. No total, temos $12\times 1\times 3\times 2=72$ possibilidades nesse caso.
- *Os cartões têm cores diferentes:* listamos a seguir as 28 possibilidades nesse caso; as letras A, B e V indicam, respectivamente, azul, branco e vermelho.

A	1	1	7	1	1	2	2	6	6	1	1	3	3	5	5	1	4	4	2	2	5	2	2	3	3	4	4	3
B	1	7	1	2	6	1	6	1	2	3	5	1	5	1	3	4	1	4	2	5	2	3	4	2	4	2	3	3
V	7	1	1	6	2	6	1	2	1	5	3	5	1	3	1	4	4	1	5	2	2	4	3	4	2	3	2	3

No total, o número de maneiras é então $9+72+28=109$.

Solução

2ª solução: Para fazer uma escolha possível, Vitor deve pegar um trio de cartões cuja soma seja igual a 9. Quanto aos números, há sete possibilidades para esses trios:

$$9 = 1+1+7 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$$

Observamos que os trios são de três tipos diferentes:

- (3,3,3) — os três números são iguais.
- (1,2,6), (1,3,5) e (2,3,4) — os três números são diferentes.
- (1,1,7), (1,4,4) e (2,2,5) — um número é repetido duas vezes e o terceiro é diferente.

Há uma única maneira de escolher cartões para o trio (3,3,3), a saber, um de cada cor. Já para os trios do segundo tipo, cada um dos números pode aparecer em qualquer das cores; nesse caso, há $3 \times 3 \times 3 = 27$ maneiras de escolher um desses trios. Como são 3 trios, o total aqui é $3 \times 27 = 81$ possibilidades.

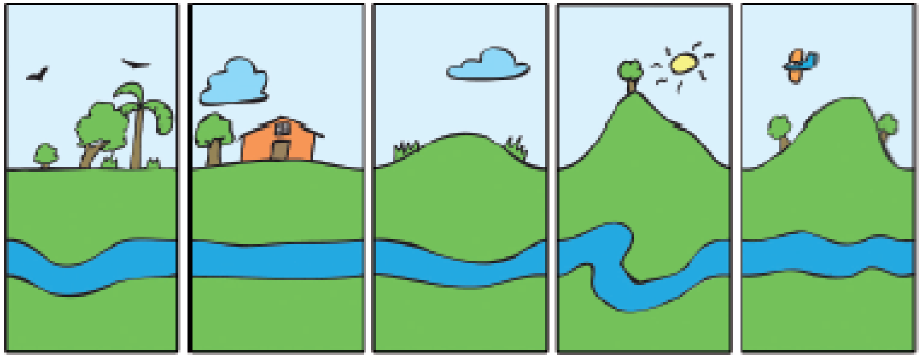
Para um trio do terceiro tipo, devemos escolher duas cores distintas para os números repetidos, o que pode ser feito de 3 maneiras (AB, AV e BV) e depois uma cor qualquer para o número diferente, o que pode ser feito de 3 maneiras. Nesse caso, o total de possibilidades é $3 \times 3 = 9$; como são 3 trios desse tipo, obtemos $3 \times 9 = 27$ possibilidades.

Finalmente, o número total de possibilidades é a soma das possibilidades de cada caso, ou seja, $1 + 81 + 27 = 109$.

Exercício 21

Exercício 21: (OBMEP 2011 - N2Q13 – 1ª fase) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?

(a) Uma semana
(b) Um mês
(c) Dois meses
(d) Quatro meses
(e) Seis meses



Solução

QUESTÃO 13
ALTERNATIVA D

Temos cinco posições distintas para colocarmos cinco quadros também distintos. Na primeira posição temos 5 escolhas distintas possíveis. Na segunda posição temos 4 escolhas distintas, e assim por diante. Pelo princípio multiplicativo, podemos formar $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ paisagens distintas. Como um mês tem, aproximadamente, 30 dias, podemos mudar a paisagem por aproximadamente $\frac{120}{30} = 4$ meses.