

Contagem 5: resolução de exercícios

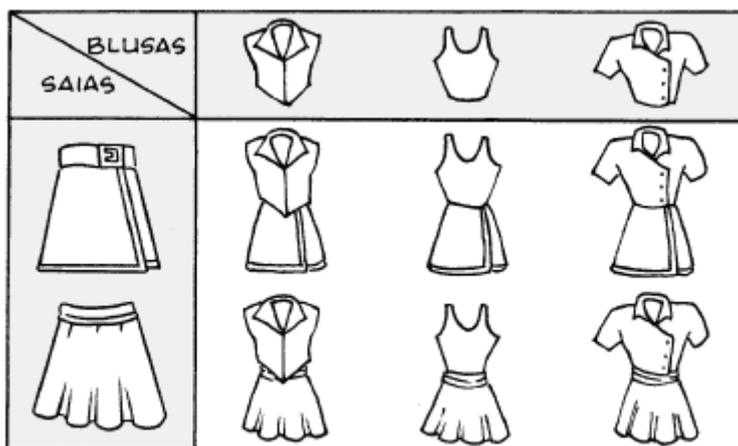
Desde a primeira aula de contagem estamos estudando o princípio multiplicativo e o princípio aditivo. Também estudamos o conceito de permutação e nas últimas aulas foram resolvidas algumas questões que já caíram em provas da OBMEP.

Exercício 1. Maria é muito indecisa. Ela pretende sair com suas amigas e está pensando em qual roupa vestir. Ela pode combinar três blusas diferentes com duas saias diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir?

Solução: Vamos representar por S_1 e S_2 as duas saias de Maria. Podemos listar todas as combinações possíveis.

- Se ela escolheu a saia S_1 , então ela pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.
- De modo análogo, se ela escolheu a saia S_2 , ela também pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.

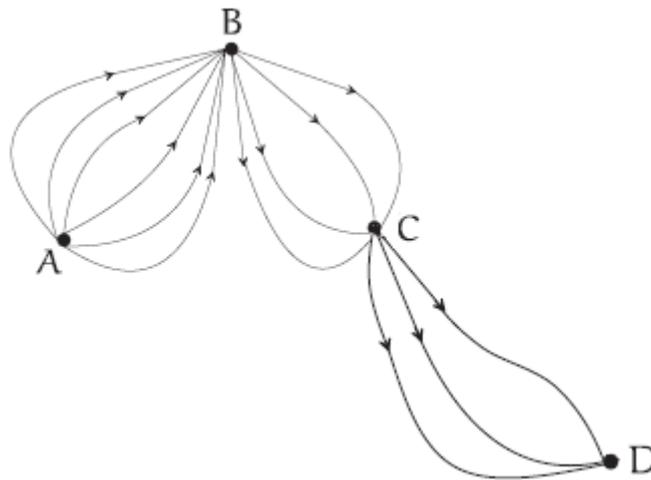
Então ao todo ela pode se vestir de $3+3=6$ modos diferentes. Veja estas possibilidades na figura a seguir.



Comentário: A resposta $3+3=6$ também pode ser escrita como $2 \times 3 = 6$. Neste caso podemos raciocinar assim. Para a escolha da saia temos 2 possibilidades. Uma vez escolhida a saia, temos 3 blusas para escolher. Então ao todo temos $2 \times 3 = 6$ pois temos uma soma de duas parcelas iguais a 3.

Exercício 2. Quantos são os números de dois algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4?

Exercício 3. Existem 6 estradas ligando as cidades A e B; existem 4 estradas ligando as cidades B e C; existem 3 estradas ligando as cidades C e D. De quantas maneiras é possível dirigir de A até D?



Exercício 4. Muitos bancos estão trocando senhas numéricas por senhas alfa- numéricas (formadas por letras). Se a senha é formada por 4 letras diferentes escolhidas em um alfabeto de 26 letras, de quantos modos diferentes uma pessoa pode formar a sua senha?

Exercício 5. Considere as letras da palavra **HILBERT**.

- Quantos são os anagramas desta palavra?
- Quantos destes anagramas começam com uma vogal?
- Quantos anagramas possuem as letras HIL escritas sequencialmente nesta ordem?

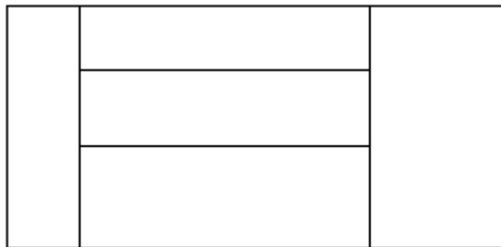
Exercício 6. Quantos são os números de três algarismos distintos?

Solução: Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a zero. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois ele não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo. A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Exercício 7. (OBMEP 2005 - N2Q3 – 2ª fase) Na caixinha de costura de Lilavati só há botões de três cores: pretos, brancos e marrons. Os botões são de três tamanhos: pequenos, médios e grandes, e além disso são de duas formas: quadrados e redondos. Na caixinha não há botões pequenos redondos nem botões grandes pretos, e dos outros tipos há exatamente um botão de cada.

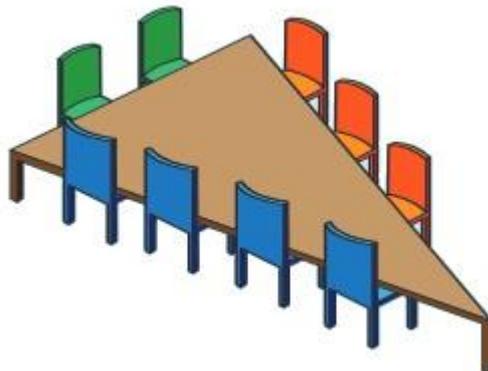
- (A) Quantos botões brancos quadrados há na caixinha?
 (B) Quantos botões há na caixinha?

Exercício 8. O retângulo a seguir está dividido em 5 regiões. Se temos 5 cores a nossa disposição, de quantas maneiras podemos colorir este retângulo de modo que cada região receba uma cor e regiões adjacentes sejam coloridas com cores diferentes?



Exercício 9. Quantos são os números abc de três algarismos distintos tais que $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $b \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $c \in \{1, 2, 3\}$.

Exercício 10. (OBMEP 2012 – N3Q18 – 1ª fase) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?



Exercício 11. (OBMEP 2008 - N2Q20 – 1ª fase) As peças da figura 1 são feitas de quadradinhos de cartolina cinza de um lado e branca do outro. A figura 3 mostra uma maneira de encaixar essas peças com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da figura 2. De quantas maneiras diferentes é possível fazer isso?

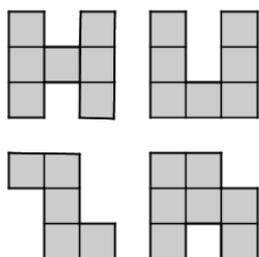


Figura 1

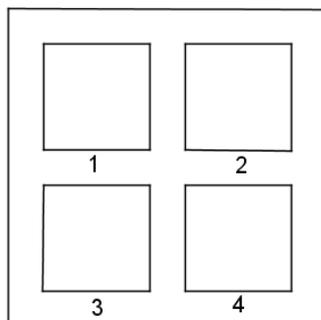


Figura 2

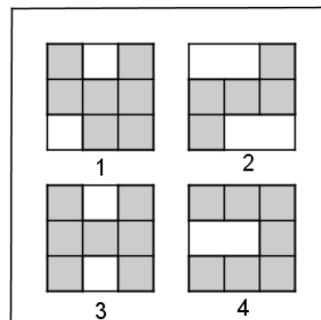
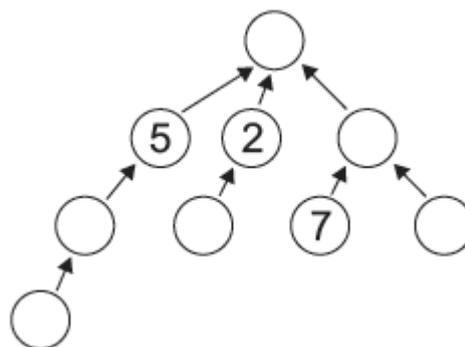
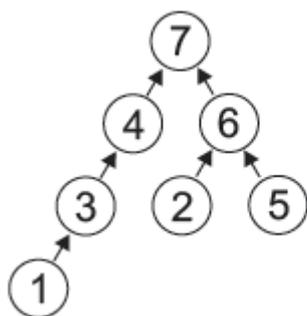


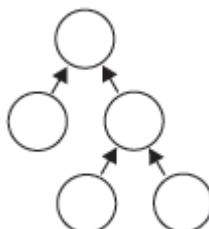
Figura 3

Exercício 12. (OBMEP 2008 - N1Q5 – 2ª fase) Os círculos da figura abaixo a esquerda foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi bem preenchida.

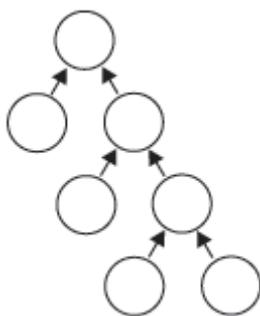


(A) Complete a figura acima a direita com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.

(B) De quantas maneiras a figura a seguir pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?



(C) De quantas maneiras a figura a seguir pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?

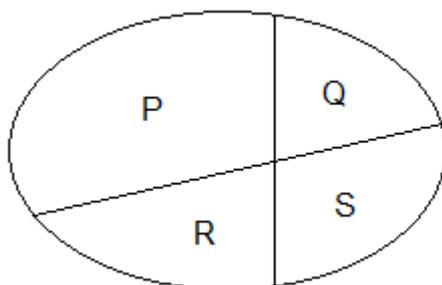


Exercício 13. (OBMEP 2009 - N2Q19 – 1ª fase) Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.



Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

Exercício 14. O mapa a seguir está dividido em 4 regiões P, Q, R e S. Dispomos de 4 cores e queremos colorir o mapa de modo que regiões que possuem uma linha de fronteira comum sejam coloridas com cores diferentes. De quantas maneiras é possível colorir o mapa?



Exercício 15. (OBMEP 2007 - N3Q20 – 1ª fase) Na figura a seguir, uma formiguinha deseja sair do ponto A e chegar no ponto B, andando apenas sobre os segmentos desenhados. Ela só pode descer, ela pode ir para a esquerda ou para a direita, mas ela não pode passar duas vezes sobre um mesmo segmento. Na figura da direita está ilustrado um dos caminhos possíveis que a formiguinha pode percorrer. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer um caminho permitido do ponto A ao ponto B?

