Exercícios

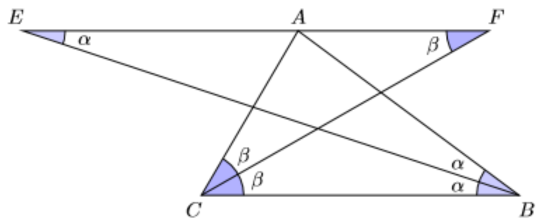
1. Todos os quatro lados de um quadrilátero são congruentes. Ele é necessariamente um quadrado?

Solução: Um quadrilátrero com 4 lados iguis é chamado losango. Só é um quadrado quando todos os seus ângulos também forem iguais.

2. Uma das diagonais de um losango é igual a um de seus lados. Quais são as medidas dos ângulos do losango?

Solução: Um losango tem quatro lados iguais. Quando for desenhada uma diagonal de mesmo comprimento que um dos lados, o losango será dividido em dois tiângulos equiláteros. Cada triângulo tem três ângulos de 60 graus, logo o losango tem dois ângulos de 60 graus e dois ângulos de 120 graus.

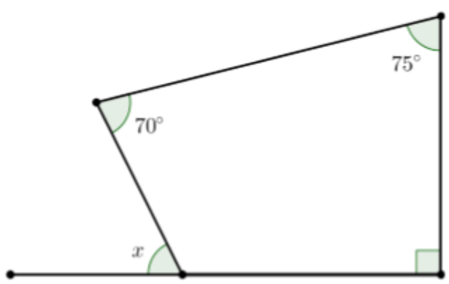
3. (Banco de Questões 2011 – Nível 2 – questão 55) Seja ABC um triângulo com $AB = 13$, $BC = 15$ e $AC = 9$. Seja r a reta paralela a BC traçaada por A. A bissetriz do ângulo $\angle ABC$ corta a reta r em E e a bissetriz do ângulo $\angle ACB$ corta r em F. Calcular a medida do segmento EF.



Solução: Como a reta EF é paralela ao lado BC, os ângulos alternos internos gerados pela transversal CF são iguais, isto é, $\angle FCB = \angle CFA$. Por outro lado, como CF é bissetriz, temos que $\angle FCB = \angle FCA$ e assim, $\angle FCA = \angle CFA$, donde o triângulo CAF é isósceles de base CF. Portanto, $AF = AC = 9$.

Analogamente, concluímos que o triângulo BAE é isósceles de base BE e $AE = AB = 13$. Assim, $EF = EA + AF = 13 + 9 = 22$.

4. Determine o valor de x no quadrilátero abaixo.



Solução: Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, temos:

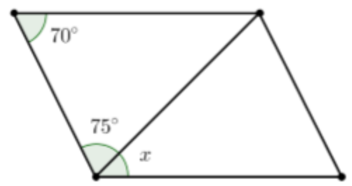
$$70^\circ + 75^\circ + 90^\circ + (180^\circ - x) = 360^\circ$$

$$415^\circ - x = 360^\circ$$

$$x = 55^\circ$$

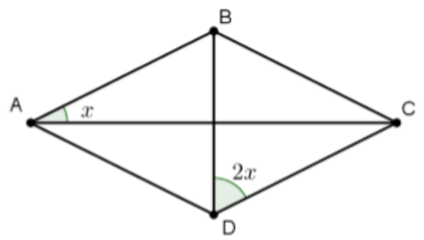
.

5. Calcule o valor de x no paralelogramo abaixo.



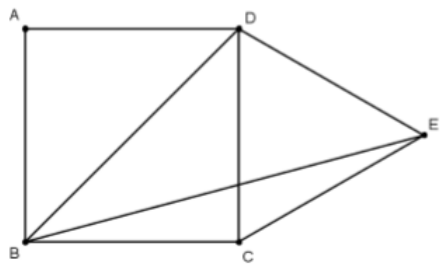
Solução: Dois ângulos consecutivos quaisquer de um paralelogramo são suplementares. Sendo assim, temos que $70^\circ + 75^\circ + x = 180^\circ$, segue que $x = 35^\circ$.

6. Calcule o valor de x no losango abaixo.



Solução: Como os lados opostos do losango são paralelos, $\angle BAC \equiv \angle DCA$. Além disso, as diagonais são perpendiculares. Chamando essa interseção das diagonais de O, temos, pela soma dos ângulos internos de $\triangle DCO$, $x + 2x + 90^\circ = 180^\circ$, segue que $x = 30^\circ$.

7. O quadrilátero ABCD, da figura abaixo, é quadrado e o triângulo DCE é equilátero. Determine a medida do ângulo E do triângulo DBE.

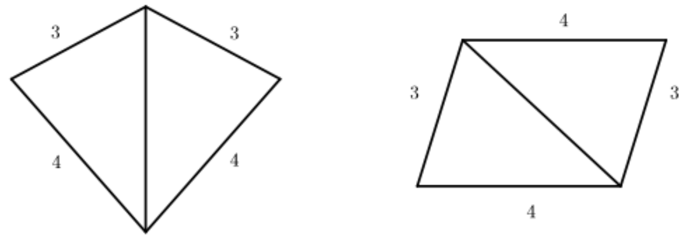


Solução: Como $\triangle DCE$ é equilátero, $\angle ECD = 60°$ e $\angle BCE = 90° + 60° = 150°$. Além disso, $\triangle BCE$ é isósceles, pois $DC = CE = BC$, e, por isso, $\angle CBE = \angle CEB = 15°$. Temos então $\angle DBE = \angle CBD - \angle CBE = 45° - 15° = 30°$.

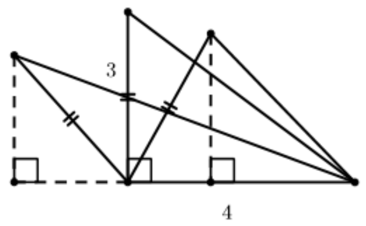
8. Quadriláteros com todos os lados iguais não são congruentes
Um erro que muitos alunos cometem é pensar que dois quadriláteros são congruentes se tiverem os seus respectivos lados iguais. Isso não é verdade. Nesse problema, veremos que quadriláteros podem ter lados correspondentes iguais, mas áreas distintas.

a) Mostre que a maior área possível para um quadrilátero que possui dois lados de comprimento 3 e dois de comprimento 4 é 12.

Solução: Existem dois modos de montar o quadrilátero com pares de lados iguais: ou eles ficam juntos ou ficam separados. Nos dois casos, o quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos que serão congruentes pelo caso(L.L.L.). Veja a figura a baixo.



Na segunda figura logo abaixo, fixamos o lado de comprimento 4 e fazemos variar o lado de comprimento 3.



Como a base de comprimento 4 está fixa, a maior área possível ocorrerá quando tivermos a maior altura possível a tal lado e isso ocorre quando o lado de comprimento 3 for perpendicular à essa base. Qualquer altura diferente de 3 seria cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa 3 e, consequentemente, menor que 3.

Portanto, a maior área para cada triângulo é $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6$. Dado que existem dois de tais triângulos em cada tipo de quadrilátero, a área máxima é $6+6 = 12$.

b) Mostre que, nos quadriláteros em que isso acontece, a soma dos ângulos opostos é $180°$.

Solução: Veja que a área máxima ocorre quando os triângulos formados são retângulos. Assim, a soma de ângulos opostos retos é $90° + 90° = 180°$. Como a soma dos ângulos internos do quadrilátero é $360°$,os outros dois ângulos também devem somar $180°$.