**Lista de Questões – OBMEP NA ESCOLA**
**Grupo N2 – Ciclo 2**

Em 2017 o Planejamento Acadêmico do Programa OBMEP na Escola prevê a realização de atividades avaliativas em forma de listas de questões. A cada ciclo serão elaboradas pelo Comitê Acadêmico listas com 5 exercícios, sendo que três dessas questões são retiradas de provas anteriores da OBMEP, presentes na segunda fase. Essas três questões devem ser resolvidas pelos alunos em casa e, posteriormente, as soluções são discutidas com os professores. As duas outras questões devem ser resolvidas em sala de aula, como forma de avaliação e de estímulo ao estudo contínuo.

As três questões da segunda fase da OBMEP distribuídas para os alunos em cada ciclo podem ser entendidas como uma espécie de “tarefa de casa”. Entre duas aulas quinzenais com os Professores da Educação Básica (PEB), desejamos que os alunos estudem continuamente, resolvendo pelo menos essas questões, além de assistirem videoaulas no Portal da Matemática, estudarem os bancos de questões, etc.

Não existe uma recomendação explicita para os PEB recolherem dos alunos as soluções destas três questões, embora isso possa ser feito. Entretanto, existe a recomendação de que, em algum momento, essas questões sejam discutidas e que as dúvidas dos alunos sejam esclarecidas pelos professores. Este momento de discussão será muito mais proveitoso para aqueles alunos que leram, tentaram entender o enunciado e tentaram resolver as questões. Para os alunos que não leram as questões, este momento de discussão será menos proveitoso e, deste modo, esperamos que as discussões coletivas das questões deixadas como “tarefa de casa” motivem que todos os alunos se dediquem para resolverem as tarefas deixadas para casa.

As duas questões resolvidas em sala de aula devem ser corrigidas pelos Professores da Educação Básica (PEB) e as soluções ou os eventuais erros mais frequentes também devem ser discutidos com os alunos. A participação dos alunos nessas questões deve ser entendida como mais um momento de aprendizado. Esta é uma oportunidade para os alunos perceberem as partes dos conteúdos que já entenderam melhor e aqueles conceitos e resultados que ainda precisam de maior dedicação. Para essas duas questões, os professores atribuirão uma nota de 0 a 10 para cada aluno da sua turma.

A seguir fornecemos a lista com as cinco questões referentes aos conteúdos presentes no ciclo 2, as soluções, os critérios de correção e alguns comentários, se for o caso.

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N2 – ciclo 2
**ENUNCIADOS: três questões para serem resolvidas em casa com discussão posterior**

**<u>Tarefa de casa 1</u> (Prova OBMEP 2005 – 2ª Fase – N2 – Questão 3)**

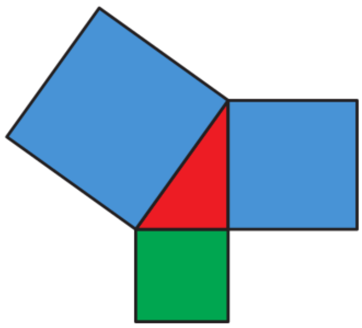
Na caixinha de costura de Lilavati só há botões de três cores: pretos, brancos e marrons. Os botões são de três tamanhos: pequenos, médios e grandes, e além disso são de duas formas: quadrados e redondos. Na caixinha não há botões pequenos redondos nem botões grandes pretos, e dos outros tipos há exatamente um botão de cada.

a) Quantos botões brancos quadrados há na caixinha?

b) Quantos botões há na caixinha?

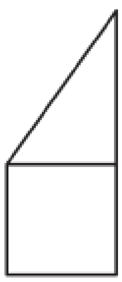
**<u>Tarefa de casa 2</u> (Prova OBMEP 2011 – 2ª Fase – N2 – Questão 5)**

João vai pintar figuras compostas por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor.

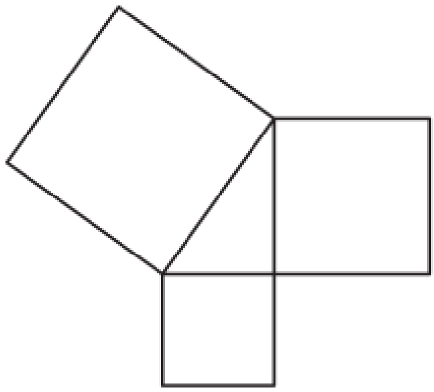


Em cada um dos itens abaixo, determine de quantas maneiras João pode pintar a figura correspondente.

a)



b)

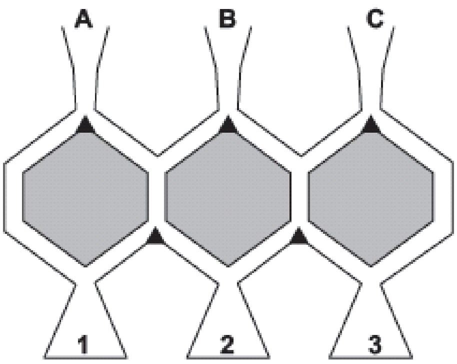


**<u>Tarefa de casa 3</u> (Prova OBMEP 2008 – 2ª Fase – N3 – Questão 5)**

No brinquedo ilustrado na figura, bolinhas são colocadas nas entradas A, B ou C e movem-se sempre para baixo, terminando em uma das caixas 1, 2 ou 3. Ao atingir um dos pontos marcados com **triângulo preto**, as bolinhas têm chances iguais de ir para cada um dos dois lados.

(a) Se uma bolinha for colocada em A, qual é a probabilidade de que ela vá parar na caixa 2?

(b) E se ela for depositada em B, qual é essa probabilidade?



Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N2 – ciclo 2
**ENUNCIADOS: duas questões para serem resolvidas em sala de aula**

## Questão 1

Utilizando somente os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, sem repetições, iremos obter 120 diferentes números. Suponha que seja feita uma fila ordenada com esses 120 números, colocando-os em ordem crescente. Então, 12345 e 12354 seriam, respectivamente, o primeiro e o segundo elementos dessa fila. Determine qual é a posição que ocupa o número 23154.

**Sugestão:** Estruture um raciocínio, dividindo em casos sua contagem, conforme o 1 esteja posicionado nos devidos valores posicionais. O uso dos princípios multiplicativo e aditivo serão úteis, não é esperado que apresente uma argumentação listando número a número até chegar em 23154.

## Questão 2

Em uma cerimônia, de premiação envolvendo jovens empreendedores, participaram 9 casais homenageados. Durante a cerimônia foram sorteadas ao acaso duas pessoas para falarem de suas experiências profissionais. Determine qual é a probabilidade de que as duas pessoas sorteadas sejam marido e mulher, isto é, seja um dos casais homenageados.

**Solução da tarefa de casa 1**
**http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n2-2005.pdf**

a) Botões brancos quadrados distinguem-se pelo tamanho. Como só há um botão de cada tipo, segue que na caixinha de Lilavati há exatamente 3 botões brancos quadrados: um pequeno, um médio e um grande.

b) Como são 3 possibilidades para tamanho, 2 possibilidades para a forma e 3 possibilidades para cor, aplicando o princípio multiplicativo, obtemos que o número de possíveis tipos de botões é dado pelo produto $3 \times 2 \times 3 = 18$. Por outro lado, como não há botões pequenos redondos (seriam 3, um para cada cor) nem botões grandes pretos (seriam 2, um para cada forma) e só há um botão de cada tipo, o total de botões na caixinha de Lilavati é $18 - (3 + 2) = 13$. Outra solução equivalente (mais longa e trabalhosa) é fazer uma tabela listando todos os tipos possíveis de botões e depois excluir os pequenos redondos e os grandes pretos.

**Solução da tarefa de casa 2**
**http://www.obmep.org.br/provas_static/2011/sf2n2-2011.pdf**

a) Se João pintar o quadrado de azul, ele terá as escolhas vermelho e amarelo para o triângulo. Se ele pintar o quadrado de vermelho, ele terá as escolhas azul e amarelo para o triângulo. Finalmente, se ele pintar o quadrado de verde, ele terá as escolhas azul, vermelho e amarelo para o triângulo. Então, segue pelo princípio aditivo que João pode pintar a figura de $2 + 2 + 3 = 7$ maneiras diferentes.

b) Se João escolher azul ou vermelho para o triângulo, cada um dos quadrados poderá ser pintado de duas cores. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ maneiras distintas de se pintar a figura. Se ele escolher amarelo para o triângulo, cada quadrado poderá ser pintado de três cores. Assim, pelo princípio multiplicativo, existem $1 \times 3 \times 3 \times 3 = 27$ maneiras distintas de se pintar a figura. Portanto, como na primeira escolha há 16 maneiras de se pintar a figura e na segunda escolha há 27 maneiras, concluímos pelo princípio aditivo que há $16 + 27 = 43$ da maneiras distintas de pintar a figura.

**Solução da tarefa de casa 3**
**http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n3-2008.pdf**

(a) Se a bolinha parte de C, para chegar à caixa 2 ela deve ir para a esquerda tanto na primeira como na segunda bifurcação. Como a bolinha tem chances iguais de ir para a direita ou para a esquerda em cada bifurcação, a probabilidade dela chegar à caixa 1/2 x 1/2 = 1/4.

(b) Se a bolinha for depositada em B, ela poderá chegar à caixa 2 por dois caminhos diferentes: *direita, esquerda ou esquerda, direita.* Agora, aplicando o mesmo raciocínio utilizado no item (a), cada escolha ocorre com probabilidade 1/4. Como estes eventos são disjuntos, a probabilidade de um deles ocorrer é a soma das probabilidades de cada evento individual. Logo, a probabilidade da bolinha sair de B e chegar à caixa 2 é 1/4 + 1/4 = 1/2.

**Solução da Questão 1 (resolvida em sala de aula)**

Fixemos inicialmente o 1 na casa das dezenas de milhar. Dessa forma, todos os números com tal característica irão aparecer antes do 23154 na fila. Assim, existem 4 possibilidades de escolha de um número para a casa dos milhares, 3 possibilidades de escolha de um número para a casa das centenas, duas possibilidades para as dezenas e 1 para as unidades. Logo, pelo princípio multiplicativo, existem 4.3.2.1=24 números tendo o 1 como algarismo inicial.

Fixemos o 1 na casa dos milhares. Observe que em função da ordenação crescente, o 2 deve ocupar necessariamente a casa das dezenas de milhar. Então, existem 3 opções de escolha para a ocupação da casa das centenas, 2 para as dezenas e 1 para as unidades. Logo, pelo princípio multiplicativo, existem 3.2.1=6 números tendo o 2 como algarismo inicial e posteriormente o 1.

Finalmente, fixemos o 1 na casa das centenas, então em função da ordenação crescente o número será da forma:

$$\underline{\ 2\ }\quad \underline{\ 3\ }\quad \underline{\ 1\ }\quad \underline{\ ?\ }\quad \underline{\ ?\ }$$

Dessa maneira, existem duas opções fixados esses três primeiros valores, 23145 ou 23154.

Portanto, pelo princípio aditivo existem 24 + 6 + 1 = 31 números em posições anteriores ao valor dado, sendo que 23154 irá ocupar a $32^{a}$ posição na fila ordenada.

**<u>Critérios de correção da Questão 1</u> (resolvida em sala de aula)**

Esta questão vale 5 pontos, distribuídos da seguinte maneira:

- 1,5 pontos para a correta contagem das 24 possibilidades para os números com o 1 na casa da dezena de milhar.

- 1,5 pontos para a correta contagem das 6 possibilidades para os números com o 2 na casa da dezena de milhar e o 1 na casa do milhar.

- 0,5 pontos para a interpretação de que existem 2 números do tipo 231 _ _ .

- 1,5 pontos para o uso correto do princípio aditivo, obtendo que 23154 irá ocupar a $32^a$ posição na fila ordenada.

**<u>Solução da Questão 2</u> (resolvida em sala de aula)**

Como serão sorteadas duas pessoas, inicialmente vamos determinar todas as duplas possíveis de serem formadas com as 18 pessoas disponíveis. Existem 18 possibilidades de escolha de uma primeira pessoa e, posteriormente, 17 possibilidades de escolha de uma segunda pessoa distinta. Pelo princípio multiplicativo, existem 18.17 = 306 duplas ordenadas formadas por duas pessoas quaisquer. Todavia, a ordenação dessas duas pessoas sorteadas é irrelevante no contexto apresentado, então cada dupla está sendo contada em duplicada (observe que AB ou BA forma a mesma dupla), logo 306/2 = 153 é a quantidade de duplas não ordenadas possíveis de serem formadas, em outras palavras, é o número de elementos de nosso "espaço amostral". Por outro lado, os "eventos favoráveis" correspondem a quantidade de casais disponíveis, ou seja, 9. Portanto, a probabilidade desejada é dada por $\frac{9}{153} = \frac{1}{17}$

**<u>Critérios de correção da Questão 2</u>** (resolvida em sala de aula).

Esta questão vale 5 pontos, distribuídos da seguinte maneira:

- 1,0 ponto pela obtenção da existência de 306 duplas ordenadas possíveis de serem estruturadas.

- 1,0 ponto por entender que a ordenação das duplas é irrelevante, efetuando 306/2 = 153..

- 1,0 ponto pela interpretação correta de que existem 9 duplas favoráveis ao que se deseja na questão.

- 2,0 pontos pelo uso correto do conceito de probabilidade, efetuando $\frac{9}{153} = \frac{1}{17}$ .