OBMEP NA ESCOLA & PIC 2016
Contagem 04
Professora: Mariana Cristina
Gabarito Exercícios

Exercício (OBMEP 2016 – N2Q12 – 1ª fase)

Cada livro da biblioteca municipal de Quixajuba recebe um código formado por três das 26 letras do alfabeto. Eles são colocados em estantes em ordem alfabética: AAA, AAB, ..., AAZ, ABA, ABB, ..., ABZ, ..., AZA, AZB, ..., AZZ, BAA, BAB e assim por diante. O código do último livro é DAB. Quantos livros há na biblioteca?

(a) 676
(b) 1352
(c) 2016
(d) 2028
(e) 2030

ALTERNATIVA E

Seja α, β e γ letras quaisquer de A até Z. O número de códigos do tipo $AA\alpha$ é 26. O número de códigos do tipo $A\alpha\beta$ é 26 x 26 = 676 e o número de códigos do tipo $\alpha\beta\gamma$ é 26 x 26 x 26 = 17576. Se o último livro codificado na ordem AAA, AAB,..., ABA,... é DAB, então ele foi registrado depois de codificados todos livros dos códigos $A\alpha\beta$, $B\alpha\beta$, $C\alpha\beta$ e mais o livro de código DAA. Logo, sua ordem numérica na classificação é 676 + 676 + 676 + 2 = 2030.

Solução mais detalhada: O livro recebeu o código DAB depois de todos os demais livros, que receberam os códigos que:

i) iniciam com a letra A, a saber:

AAA, AAB, até AAZ, num total de 26 livros;

ABA, ABB, até ABZ, 26 livros;

...

AZA, AZB,...,AZZ, 26 livros.

Até este ponto foram codificados 26 x 26 = 676 livros.

ii) iniciam com a letra B, isto é, BAA, BAB,..., BAZ, BBA,..., BBZ,..,BZA, BZB,... BZZ, num total de 26 x 26 = 676 livros.

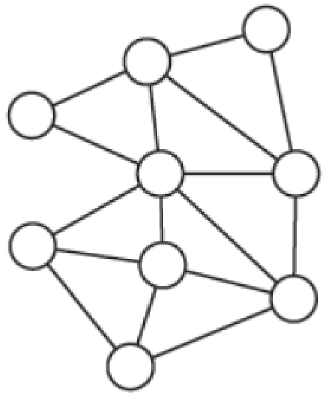
iii) iniciam com a letra C, de forma análoga, num total de 676 livros.

iv) iniciam finalmente com a letra D, totalizando somente dois livros: DAA e DAB (o último).

Portanto, o número de livros da biblioteca é 3 x 676 + 2 = 2030.

Exercício (OBMEP 2012 - N1Q13 – 1ª fase)

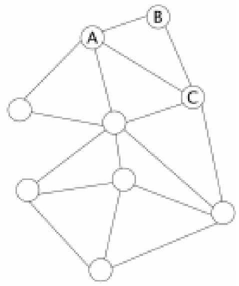
De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?



(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) 6
(e) 9

ALTERNATIVA D

Começamos a colorir a figura pelo círculo marcado com a letra A. Temos 3 opções de cores para A e, uma vez selecionada a cor de A, temos 2 possibilidades de cores para o círculo B. Para cada escolha de cores para A e B, a cor de C fica unicamente determinada pelas condições do problema. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $3\times2\times1=6$ possibilidades diferentes de colorir os círculos A, B e C. Agora notamos que, para qualquer escolha de cores para A, B e C, as cores dos círculos restantes ficam unicamente determinadas. Portanto, temos 6 maneiras diferentes de colorir os círculos da figura de acordo com as condições do enunciado.



Exercício (OBMEP 2010 - N1Q15 – 1ª fase)

Um número natural é chamado número *circunflexo* quando:

- ele tem cinco algarismos;
- seus três primeiros algarismos a partir da esquerda estão em ordem crescente;
- seus três últimos algarismos estão em ordem decrescente.

Por exemplo, 13864 e 78952 são números circunflexos, mas 78851 e 79421 não o são. Quantos são os números circunflexos maiores do que 77777?

(a) 30
(b) 36
(c) 42
(d) 48
(e) 54

ALTERNATIVA B

Não existem números circunflexos começando com 8, pois nesse caso o segundo algarismo seria 9, não sobrando nenhum algarismo maior para aparecer no centro. Por outro lado, qualquer número começando com 6 à esquerda é menor do que 77777. Assim, os circunflexos maiores do que 77777 são da forma 789**AB**, onde **A** e **B** denotam algarismos de 0 a 9. Notamos que **A** não pode ser 0, pois nesse caso não seria possível escolher um algarismo para **B**. Além disso **A** também não pode ser 9, pois os três últimos algarismos devem estar em ordem decrescente; logo **A** só pode assumir valores de 1 a 8. Se **A** for 8, **B** pode ser escolhido entre os algarismos de 0 a 7, ou seja, temos 8 escolhas para **B**. Do mesmo modo, se **A** for 7 temos 6 escolhas para **B** e assim por diante, até o caso em que **A** for 1, quando temos apenas 1 escolha para **B**. Logo o número total de números circunflexos é $8+7+6+5+4+3+2+1=36$.

Exercício (OBMEP 2007 - N1Q19 – 1ª fase)

Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. O quarto é quadrado e ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

(a) 8 (b) 16 (c) 18 (d) 20 (e) 24

(alternativa B) Manuela pode começar pintando uma das 4 paredes de azul. Depois disso, sobram 2 escolhas de cor para a parede oposta (verde ou branco). Para acabar, ela pode pintar uma das paredes ainda não pintadas com uma das 2 cores não usadas, e então pintar a última parede com a cor que falta. O número de maneiras diferentes de efetuar esse procedimento é $4 \times 2 \times 2 = 16$.

Exercício (OBMEP 2005 - N1Q9 – 1ª fase)

O Campeonato Brasileiro de Futebol de 2005 foi disputado por 22 times. Cada time enfrenta cada um dos outros duas vezes, uma vez em seu campo e outra no campo do adversário. Quantas partidas serão disputadas por cada time?

(a) 40
(b) 41
(c) 42
(d) 43
(e) 44

(alternativa C)

Como há 22 times no campeonato e cada time só não enfrenta a si próprio, então ele joga 21 vezes (com os outros 21 times) em seu campo e mais 21 vezes nos campos dos adversários. No total, cada time disputa 21 + 21 = 42 partidas.

Exercício (OBMEP 2005 - N1Q15 – 1ª fase)

Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

(a) 32
(b) 36
(c) 45
(d) 46
(e) 48

(alternativa A)

Os números nos bilhetes comprados por Marcelo são da forma *777X*, *77X7*, *7X77* ou *X777*, onde *X* representa algum dos oito algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9. Em cada um desses casos, há 8 possibilidades para os números dos bilhetes. Por exemplo, no primeiro caso, temos os seguintes oito números: 7771, 7772, 7773, 7774, 7775, 7776, 7778 e 7779. Portanto, o número de bilhetes comprados por Marcelo é 4 x 8 = 32.