Exercício 1. (OBMEP 2011 - N2Q13 – 1ª fase)

https://www.youtube.com/watch?time_continue=4&v=TEzjj7yz2sM

Solução

ALTERNATIVA D

Temos cinco posições distintas para colocarmos cinco quadros também distintos. Na primeira posição temos 5 escolhas distintas possíveis. Na segunda posição temos 4 escolhas distintas, e assim por diante. Pelo princípio multiplicativo, podemos formar $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ paisagens distintas. Como um mês tem, aproximadamente, 30 dias, podemos mudar a paisagem por aproximadamente $\frac{120}{30} = 4$ meses.

Exercício 2. (OBMEP 2015 - N1Q5 – 1ª fase)

ALTERNATIVA D

https://www.youtube.com/watch?v=cm9nhC4kLHw

QUESTÃO 5

ALTERNATIVA D

Como os números devem ter dois algarismos, eles não podem ter o algarismo 0 na casa das dezenas; assim, existem 3 possibilidades para a casa das dezenas (1, 2 ou 5) e quatro possibilidades para a casa das unidades (0, 1, 2 ou 5). Pelo Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo), há, portanto, 3 x 4 = 12 números de dois algarismos que podem ser formados com os algarismos de 2015 (pode haver repetição de algarismos). Neste caso, os números podem ser explicitamente listados: 10, 11, 12, 15, 20, 21, 22, 25, 50, 51, 52 e 55.

Exercicio 3. (OBMEP 2008 - N1Q18 – 1ª fase)

(ALTERNATIVA C)

Para cada uma das camisas pretas e azul é possível escolher três camisas de cor diferente, num total de $3 \times 3 = 9$ possibilidades; notamos que estar com uma camisa preta de mangas curtas é diferente de estar com uma de mangas compridas. Para as camisas cinza e branca podemos escolher qualquer calça, num total de $2 \times 4 = 8$ possibilidades. Ao final, temos $9 + 8 = 17$ possibilidades.

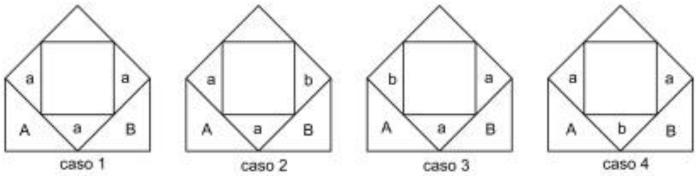
Uma outra maneira de resolver a questão é a seguinte: são 5 as possibilidades de escolha de camisas e quatro a de calças, logo, sem levar em conta as cores, há $5 \times 4 = 20$ modos de se vestir. Destes, devemos descontar os casos em que se repetem as cores de calça e camisa, que são apenas três: camisa preta de mangas compridas com calça preta, camisa preta de mangas curtas com calça preta e camisa azul com calça azul. Logo, são $20 - 3 = 17$ maneiras diferentes de se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas.

Exercício 4. (OBMEP 2013 - N2Q19 – 1ª fase)

https://www.youtube.com/watch?v=OBrW7EQC8-I

QUESTÃO 19
ALTERNATIVA C

Primeiro pintamos o quadrado e o triângulo superior, o que pode ser feito de $3\times 2=6$ maneiras diferentes. Uma vez isso feito, dividimos o problema em quatro casos de acordo com as cores dos triângulos menores da parte de baixo, como na figura. As letras minúsculas *a* e *b* indicam cores diferentes; notamos que como o quadrado já foi pintado, para os três triângulos menores só restam duas cores disponíveis. As letras maiúsculas *A* e *B* servirão apenas para denotar os triângulos maiores no que segue.



- *Caso 1:* temos duas escolhas para *a*; uma vez feita essa escolha, podemos pintar *A* com duas cores, bem como *B*. Isso pode ser feito de $2\times 2\times 2=8$ maneiras diferentes.
- *Caso 2:* temos duas escolhas para *a* e uma para *b*; feitas essas escolhas, podemos pintar *A* com duas cores e *B* com apenas uma. Isso pode ser feito de $2\times 1\times 2\times 1=4$ maneiras diferentes.
- *Caso 3:* esse caso é idêntico ao caso 2.
- *Caso 4:* temos duas escolhas para *a* e uma para *b*; feitas essas escolhas, só há uma possibilidade para pintar *A* e *B*. Isso pode ser feito de $2\times 1\times 1\times 1=2$ maneiras diferentes.

No total, temos $6\times(8+4+4+2)=6\times 18=108$ maneiras diferentes de pintar a figura.

Exercício 5. (OBMEP 2012 - N2Q16 – 1ª fase)

https://www.youtube.com/watch?v=X-xicfTuWyc

QUESTÃO 16
ALTERNATIVA C

Podemos pensar nos números naturais entre 0 e 999 como sequências de três algarismos de 000 até 999. Estamos interessados em contar as sequências em que aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3. Para fazer essa contagem, vamos chamar de *a* o número de sequências em que não aparece o algarismo 3. Essas sequências se dividem em dois tipos: aquelas em que não aparece o algarismo 2 e aquelas em que aparece pelo menos um algarismo 2; denotamos por *b* e *c*, respectivamente, o número dessas últimas sequências. Temos claramente $a=b+c$ e queremos calcular $c=a-b$; basta então calcular *a* e *b*. Mas é imediato que $a=9\times 9\times 9$ (não podemos usar o 3, logo sobram 9 algarismos) e $b=8\times 8\times 8$ (não podemos usar o 2 e o 3, logo sobram apenas 8 algarismos). Logo $c=9\times 9\times 9-8\times 8\times 8=729-512=217$.

$$a=b+c:\quad \begin{matrix}\textit{sequências}\\ \textit{sem 3}\end{matrix} = \begin{matrix}\textit{sequências sem 3}\\ \textit{e sem 2}\end{matrix} + \begin{matrix}\textit{sequências sem 3}\\ \textit{e com 2}\end{matrix}$$

$$c=a-b:\quad \begin{matrix}\textit{sequências sem 3}\\ \textit{e com 2}\end{matrix} = \begin{matrix}\textit{sequências}\\ \textit{sem 3}\end{matrix} - \begin{matrix}\textit{sequências sem 3}\\ \textit{e sem 2}\end{matrix}$$

Exercício 6. (OBMEP 2010 - N2Q19 – 1ª fase)

QUESTÃO 19
ALTERNATIVA A

O número central pode ser qualquer dos pares de 2 a 18. Se o número central é 2, há um único ímpar de 1 a 19 menor que ele e 9 ímpares maiores que ele; logo há $1 \times 9 = 9$ triplas nesse caso. Se o número central é 4, há 2 ímpares menores e 8 ímpares maiores que ele; nesse caso temos $2 \times 8 = 16$ triplas. Continuando esse processo, vemos que o número total de triplas é

$$1 \times 9 + 2 \times 8 + 3 \times 7 + 4 \times 6 + 5 \times 5 + 6 \times 4 + 7 \times 3 + 8 \times 2 + 9 \times 1 = 165.$$

Exercício 7. (OBMEP 2014 - N2Q18 – 1ª fase)

https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=BgtMj1vBV7c

QUESTÃO 18
ALTERNATIVA E

Vamos fazer essa contagem pensando em colocar os algarismos na unidade, dezena, centena e unidade de milhar do número.

Como se trata de um número de quatro algarismos, o algarismo 0 não pode ser colocado na unidade de milhar. Temos então 3 possibilidades para se colocar o algarismo 0.

Colocado o zero sobram então três posições para se colocar o algarismo ímpar, e como há cinco algarismos ímpares, temos um total de 15 possibilidades para se colocar o algarismo ímpar no número.

Colocado o algarismo 0 e o algarismo ímpar, sobram duas posições para se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos. Fazemos a escolha do primeiro algarismo par não nulo e o colocamos na primeira posição ainda não preenchida do número (há apenas 4 possibilidades de escolha: 2, 4, 6 e 8). Finalmente, preenchemos a última posição com outro número par não nulo, diferente daquele anteriormente colocado (3 possibilidades). Temos assim 12 possibilidades de se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos no número.

Pelo Princípio Multiplicativo, o total de possibilidades é 3 15 12 540

Exercício 8. (OBMEP 2015 – N1Q6 – 2ª fase)

https://www.youtube.com/watch?v=pCWs3V8I8YA

item a)

Para criar uma senha de 11 algarismos que inicie com o bloco 20152015, Pedro precisa apenas determinar os três últimos algarismos que definem a senha.

20152015_ _ _

Ele pode usar qualquer um dos 10 algarismos na antepenúltima, penúltima e última posição da senha. Pelo Princípio Multiplicativo, há $10 \times 10 \times 10 = 1000$ possibilidades. Portanto, existem mil senhas que começam com o bloco 20152015.

Item b)

Como o bloco 0123456789 é formado por 10 algarismos, resta acrescentar 1 algarismo para se criar uma senha. Esse algarismo deve ser colocado ou na primeira ou na última posição, para não "quebrar" o bloco.

_0123456789

0123456789_

Na primeira posição é possível colocar 10 algarismos. O mesmo ocorre na última posição. Assim, pelo Princípio Aditivo, existem $10 + 10 = 20$ senhas diferentes que contêm o bloco 0123456789.

Item c)

Para se criar uma senha de acordo com as novas condições exigidas, devemos inserir um algarismo no bloco 0123456789: à esquerda, à direita ou entre dois de seus algarismos. Há 11 espaços possíveis para se inserir um dos dez algarismos:

$$\boxed{\_0\_1\_2\_3\_4\_5\_6\_7\_8\_9\_}$$

Logo há, nas condições descritas, 11 x 10 = 110 possibilidades de se criar senhas. Entretanto, algumas dessas senhas assim criadas são repetidas, e devemos descontá-las de nossa contagem. Observemos um exemplo: a senha 00123456789 pode ser obtida de duas maneiras diferentes:

- $\underline{0}0123456789$ (colocando-se 0 à esquerda do número 0123456789)
- $0\underline{0}123456789$ (colocando-se 0 entre 0 e 1 no número 0123456789)

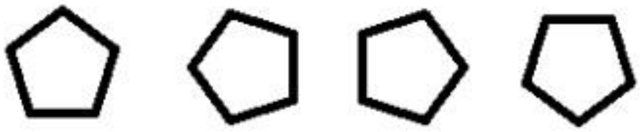
Cada um dos algarismos de 0 a 9 pode gerar uma, e só uma, duplicação de senha. Assim, devemos descontar da contagem inicial uma senha para cada algarismo. Há, portanto, 110 – 10 = 100 senhas que Pedro pode criar nas condições descritas.

Exercício 9. (OBMEP 2014 - N2Q2 – 2ª fase)

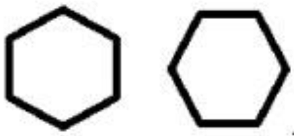
https://www.youtube.com/watch?v=fvdi6Czggi0

Questão 2

Como os cartões são quadrados podemos girá-los como quiser. Assim, o triângulo e o pentágono podem ser colados de 4 maneiras distintas.



Já o quadrado, não importa quanto giremos, ele sempre gerará a mesma imagem; e para o hexágono teremos duas possibilidades.



item a)

O pentágono pode ser visualizado de 4 maneiras distintas. Basta observar que o pentágono tem um lado paralelo a um dos lados do cartão, logo há 4 lados possíveis para esse lado ficar paralelo a um dos lados do cartão.

Item b)

O hexágono pode ser visualizado de 2 maneiras distintas. Basta observar que o hexágono tem dois lados opostos paralelos aos lados do cartão, logo esses lados podem estar paralelos aos lados de cima e de baixo, ou aos lados direito e esquerdo.

Item c)

Pelo princípio multiplicativo, o triângulo pode ser colado em 4 posições e de 4 maneiras distintas (4 x 4 =16 possibilidades). O quadrado terá 3 posições possíveis de uma única maneira. O pentágono terá 2 posições possíveis e pode ser colado de 4 maneiras e o hexágono deverá ser colado na quarta e última posição, de duas maneiras possíveis.

Logo, há 4 x 4 x 3 x 1 x 2 x 4 x 1 x 2 = 768 maneiras distintas.

Outra solução

Podemos começar posicionando as figuras no álbum. Isso pode ser feito de 4 x 3 x 2 x 1 = 24 maneiras diferentes. Depois, para cada uma das 24 maneiras, podemos modificar a posição das figuras: Triângulo, 4 maneiras; Quadrado, 1 maneira; Pentágono, 4 maneiras; Hexágono, 2 maneiras.

Logo, teremos um total de 24 x 4 x 1 x 4 x 2 = 768 configurações diferentes para a primeira página do álbum.

Exercício 10. (OBMEP 2012 - N1Q5 – 2ª fase)

https://www.youtube.com/watch?v=2kNyZNYMwJU

N1Q5 – Solução

a) O número 9 pode ser escrito como soma de duas parcelas inteiras de quatro maneiras diferentes: $9=1+8=2+7=3+6=4+5$. Como a ordem em que os cartões são escolhidos não altera sua soma, segue que Vítor pode escolher dois cartões azuis cujos números somam 9 de 4 maneiras diferentes.

b) *1ª solução:* Podemos escrever 9 como soma de dois números de 1 a 8 de 4 maneiras: $9=1+8=2+7=3+6=4+5$. No caso de cartões com a mesma cor, escolhemos uma das expressões de 9 como soma e depois a cor dos cartões; como as cores são em número de 3, isso pode ser feito de $4\times3=12$ maneiras. No caso de cartões de cores diferentes, escolhemos uma das expressões de 9, a cor de um dos cartões e uma cor diferente para o outro cartão; isso pode ser feito de $4\times3\times2=24$ maneiras diferentes. No total, é possível escolher dois cartões cuja soma seja 9 de $12+24=36$ maneiras diferentes.

2ª solução: Para fazer uma escolha possível, Vitor deve pegar um par de cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9. Os números desses cartões podem ser escolhidos de 4 maneiras diferentes, como vimos no item anterior. Para cada um desses pares, a cor do cartão com o menor número pode ser escolhida de 3 maneiras diferentes, bem como a cor do cartão com o maior número; no total, as cores dos cartões de um par podem ser escolhidas de $3\times3=9$ maneiras diferentes. Como são 4 pares, o número total de escolhas é $4\times9=36$.

c) *1ª solução:* Há três casos a considerar.

- *Os três cartões têm a mesma cor:* as possibilidades para que sua soma 9 seja são $9=1+2+6=1+3+5=2+3+4$; como são 3 cores, o número de possiblidades nesse caso é $3\times3=9$.
- *Dois cartões de uma cor e o terceiro de uma cor diferente:* os dois cartões da mesma cor somam de 3 a 8; as possibilidades são aqui $3=1+2$, $4=1+3$, $5=1+4=2+3$, $6=1+5=2+4$, $7=1+6=2+5=3+4$ e $8=1+7=2+6=3+5$, num total de 12 possibilidades; em qualquer caso, para completar a soma 9, o terceiro cartão pode ser escolhido de uma única maneira. Para as cores, temos 3 possibilidades para os cartões de mesma cor e 2 para o de cor diferente. No total, temos $12\times1\times3\times2=72$ possibilidades nesse caso.
- *Os cartões têm cores diferentes:* listamos a seguir as 28 possibilidades nesse caso; as letras A, B e V indicam, respectivamente, azul, branco e vermelho.

A	1	1	7	1	1	2	2	6	6	1	1	3	3	5	5	1	4	4	2	2	5	2	2	3	3	4	4	3
B	1	7	1	2	6	1	6	1	2	3	5	1	5	1	3	4	1	4	2	5	2	3	4	2	4	2	3	3
V	7	1	1	6	2	6	1	2	1	5	3	5	1	3	1	4	4	1	5	2	2	4	3	4	2	3	2	3

No total, o número de maneiras é então $9+72+28=109$.

2ª solução: Para fazer uma escolha possível, Vitor deve pegar um trio de cartões cuja soma seja igual a 9. Quanto aos números, há sete possibilidades para esses trios:

$$9 = 1+1+7 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$$

Observamos que os trios são de três tipos diferentes:

- (3,3,3) — os três números são iguais.
- (1,2,6), (1,3,5) e (2,3,4) — os três números são diferentes.

- (1,1,7), (1,4,4) e (2,2,5) — um número é repetido duas vezes e o terceiro é diferente.

Há uma única maneira de escolher cartões para o trio (3,3,3), a saber, um de cada cor. Já para os trios do segundo tipo, cada um dos números pode aparecer em qualquer das cores; nesse caso, há $3\times3\times3=27$ maneiras de escolher um desses trios. Como são 3 trios, o total aqui é $3\times27=81$ possibilidades.

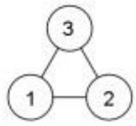
Para um trio do terceiro tipo, devemos escolher duas cores distintas para os números repetidos, o que pode ser feito de 3 maneiras (AB, AV e BV) e depois uma cor qualquer para o número diferente, o que pode ser feito de 3 maneiras. Nesse caso, o total de possibilidades é $3\times3=9$; como são 3 trios desse tipo, obtemos $3\times9=27$ possibilidades.

Finalmente, o número total de possibilidades é a soma das possibilidades de cada caso, ou seja, $1+81+27=109$.

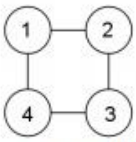
Exercício 11. (OBMEP 2009 - N1Q5 – 2ª fase)

OBMEP 2009 – 2ª fase – Soluções - Nível 1

Nível 1 questão 5



a) Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a figura 1 pode ser pintada de $3\times2\times1=6$ maneiras diferentes.

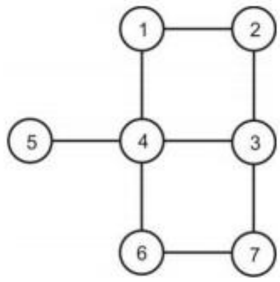


b) Vamos dividir as maneiras de pintar a figura 2 em dois casos.

1º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor. Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3\times2\times2=12$.

2º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3\times2\times1=6$.

No total, a figura 2 pode ser pintada de $12+6=18$ maneiras diferentes.



c) As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ele tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo temos $18\times2=36$ possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5. Dividimos agora nossa contagem em dois casos:

1º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor. Nesse caso, temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos $1\times2=2$ possibilidades.

2º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade.

No total, há $36\times2+36\times1=108$ maneiras diferentes de pintar a figura 3.

Exercício 12. (OBMEP 2005 - N1Q6 – 2ª fase)

Solução:

A) O algarismo 1 não pode ser repetido porque não é possível escrever 12 como uma soma da forma $1+1+x$ onde x é um algarismo; de fato, como x é no máximo 9, esta soma será no máximo 11. O algarismo 4 também não pode ser repetido pois neste caso o número teria que ser **444**, que tem três algarismos iguais e não está de acordo com o enunciado. Finalmente, os algarismos 7, 8 e 9 não podem ser repetidos, pois neste caso a soma dos algarismos ultrapassaria 12. Assim, o algarismo repetido só pode ser 2, 3, 5 ou 6. Com 2, 3 e 5 podemos formar 9 números: 228, 282, 822, 336, 363, 633, 552, 525 e 255. Com o algarismo 6 podemos formar 2 números: 606 e 660. Portanto a quantidade de números escrita é $9+2=11$.

B) A soma de três números ímpares é um número ímpar. Como 12 é par, vemos que é impossível achar três algarismos ímpares cuja soma é 12. Logo nenhum dos números escritos tem os três algarismos ímpares.