Par ou Ímpar?

Veremos aqui como lidar com os restos da divisão de números inteiros por um número natural dado, introduzindo uma nova aritmética chamada *aritmética residual* ou *aritmética modular*.

A soma de dois números pares é par. De fato, os dois números podem ser escritos na forma $2a$ e $2b$, cuja soma é $2(a+b)$, logo par.

A soma de dois números ímpares é par. De fato, os números são da forma $2a+1$ e $2b+1$, cuja soma é $2(a+b+1)$, logo par.
A soma de um número par com um número ímpar é ímpar. De fato, um dos números é da forma $2a$ e o outro $2b+1$, cuja soma é $2(a+b)+1$, logo ímpar.

A paridade, isto é, a qualidade de ser par ou ímpar, da soma de dois números só depende da paridade de cada um dos números e não dos números em si.

O produto de dois números pares é par. De fato, os números sendo da forma $2a$ e $2b$, temos que o seu produto é $4ab = 2(2ab)$ e, portanto, múltiplo de 4, logo par.

O produto de um número par por um número ímpar é par. De fato, um número da forma $2a$ e um número da forma $2b+1$ têm um produto igual a $2a(2b+1) = 2(2ab+a)$, que é par.

O produto de dois números ímpares é ímpar. De fato, sendo os números da forma $2a+1$ e $2b+1$, o seu produto é $2(2ab+a+b)+1$, logo ímpar.

Novamente, como no caso da soma, temos que a paridade do produto de dois números só depende da paridade desses números e não dos números em si.

Assim, podemos decidir a paridade de uma expressão complexa envolvendo produtos e somas de inteiros do modo a seguir.

Atribuindo o símbolo $\overline{0}$ aos números pares e o símbolo $\overline{1}$ aos números ímpares, as observações acima nos fornecem as seguintes tabelas que regem a paridade das somas e produtos dos números inteiros.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Exemplo 1: Qual é a paridade do número $20^{10} \times 11^{200} + 21^{19}$?

Solução: Vamos substituir na expressão acima o número 20 por $\overline{0}$, por ser par; e os números 11 e 21 por $\overline{1}$, por serem ímpares. Obtemos, assim, a expressão $\overline{0}^{10} \times \overline{1}^{200} + \overline{1}^{19} = \overline{1}$
Portanto $20^{10} \times 11^{200} + 21^{19}$ é ímpar.

Esse método foi idealizado pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado o maior matemático de todos os tempos, quando tinha perto de 17 anos.

Exemplo 2: Mostre que o dobro de um número ímpar é par mas nunca múltiplo de 4.

Solução: Sabemos que um número ímpar é da forma $2a + 1$ e temos que mostrar que o dobro dele não é múltiplo de 4, então basta multiplicar por 2 e analisarmos o resto.

$$2(2a + 1) = 4a + 2$$

O resto é igual a 2, logo não é múltiplo de 4.