$$\boxed{\text{Se } a < b \text{ e } c > 0, \text{ então } c \times a < c \times b.}$$

Problema 3.6. Mostre com um exemplo que em $\mathbb{Z}$ não vale a propriedade:

$$\text{Se } a < b, \text{ então } a \times c < b \times c, \text{ qualquer que seja } c.$$

Nem a sua recíproca:

$$\text{Se } a \times c < b \times c, \text{ então } a < b, \text{ qualquer que seja } c.$$

3.2 Múltiplos Inteiros de um Número

Dado um inteiro a, consideremos o conjunto dos múltiplos inteiros de a:

$$a\mathbb{Z} = \{a \times d;\ d \in \mathbb{Z}\}.$$

Problema 3.7. Mostre que os múltiplos inteiros de um elemento a possuem as seguintes propriedades:

(i) 0 é múltiplo de a.

(ii) Se m é um múltiplo de a, então $-m$ é múltiplo de a.

(iii) Um múltiplo de um múltiplo de a é um múltiplo de a.

(iv) Se m e m' são múltiplos de a, então $m+m'$ e $m-m'$ são também múltiplos de a.

(v) Se m e m' são múltiplos de a, então $e \times m + f \times m'$ é múltiplo de a, quaisquer que sejam os inteiros e e f (note que (iv) é um caso particular da presente propriedade).

(vi) Se $m + m'$ ou $m - m'$ é múltiplo de a e m é múltiplo de a, então m' é múltiplo de a.

O mesmo resultado vale para os múltiplos comuns de dois inteiros a e b. De fato, o seguinte problema lida com esta situação.

Problema 3.8. Mostre que os múltiplos inteiros comuns de dois elementos a e b possuem as seguintes propriedades:

(i) 0 é múltiplo comum de a e b.

(ii) Se m é um múltiplo comum de a e b, então $-m$ é múltiplo comum de a e b.

(iii) Um múltiplo de um múltiplo comum de a e b é um múltiplo comum de a e b.

(iv) Se m e m' são múltiplos comuns de a e b, então $m+m'$ e $m-m'$ são também múltiplos comuns de a e b.

(v) Se m e m' são múltiplos comuns de a e b, então $e \times m + f \times m'$ é múltiplo comum de a e b, quaisquer que sejam os inteiros e e f (note que (iv) é um caso particular da presente propriedade).

(vi) Se $m + m'$ ou $m - m'$ é múltiplo comum de a e b e m é múltiplo comum de a e b, então m' é múltiplo comum de a e b.

Vimos que dois números naturais a e b possuem sempre um mmc que é um número natural. Se um dos números a ou b é nulo e o outro é um inteiro qualquer, então esses números só admitem o zero como múltiplo comum (justifique), que será chamado do mínimo múltiplo comum (mmc) de a e b. Se a e b são ambos não nulos, mesmo que não sejam ambos positivos, então define-se o mínimo múltiplo comum (mmc) de a e b como sendo o menor múltiplo comum positivo; ou seja, o menor elemento positivo do conjunto

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}.$$

Problema 3.9. Suponha que os números 216 e 144 sejam múltiplos comuns de um determinado par de números a e b. Mostre que $\text{mmc}(a, b) \leq 72$.

SUGESTÃO: Utilize a propriedade (iv) do Problema 3.8.

3.3 Divisores

Nesta seção olharemos a noção de múltiplo sob outro ponto de vista.

Definição. Diremos que um número inteiro d é um *divisor* de outro inteiro a, se a é múltiplo de d; ou seja, se $a = d \times c$, para algum inteiro c.

Quando a é múltiplo de d dizemos também que a é *divisível* por d ou que d *divide* a.

Representaremos o fato de um número d ser divisor de um número a, ou d dividir a, pelo símbolo $d \mid a$. Caso d não divida a, escrevemos $d \nmid a$.