



Se $a < b$ e $c > 0$, então $c \times a < c \times b$.

Problema 3.6. Mostre com um exemplo que em \mathbb{Z} não vale a propriedade:

Se $a < b$, então $a \times c < b \times c$, qualquer que seja c .

Nem a sua recíproca:

Se $a \times c < b \times c$, então $a < b$, qualquer que seja c .

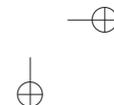
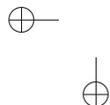
3.2 Múltiplos Inteiros de um Número

Dado um inteiro a , consideremos o conjunto dos múltiplos inteiros de a :

$$a\mathbb{Z} = \{a \times d; d \in \mathbb{Z}\}.$$

Problema 3.7. Mostre que os múltiplos inteiros de um elemento a possuem as seguintes propriedades:

- (i) 0 é múltiplo de a .
- (ii) Se m é um múltiplo de a , então $-m$ é múltiplo de a .
- (iii) Um múltiplo de um múltiplo de a é um múltiplo de a .
- (iv) Se m e m' são múltiplos de a , então $m + m'$ e $m - m'$ são também múltiplos de a .





(v) Se m e m' são múltiplos de a , então $e \times m + f \times m'$ é múltiplo de a , quaisquer que sejam os inteiros e e f (note que (iv) é um caso particular da presente propriedade).

(vi) Se $m + m'$ ou $m - m'$ é múltiplo de a e m é múltiplo de a , então m' é múltiplo de a .

O mesmo resultado vale para os múltiplos comuns de dois inteiros a e b . De fato, o seguinte problema lida com esta situação.

Problema 3.8. Mostre que os múltiplos inteiros comuns de dois elementos a e b possuem as seguintes propriedades:

(i) 0 é múltiplo comum de a e b .

(ii) Se m é um múltiplo comum de a e b , então $-m$ é múltiplo comum de a e b .

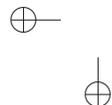
(iii) Um múltiplo de um múltiplo comum de a e b é um múltiplo comum de a e b .

(iv) Se m e m' são múltiplos comuns de a e b , então $m + m'$ e $m - m'$ são também múltiplos comuns de a e b .

(v) Se m e m' são múltiplos comuns de a e b , então $e \times m + f \times m'$ é múltiplo comum de a e b , quaisquer que sejam os inteiros e e f (note que (iv) é um caso particular da presente propriedade).

(vi) Se $m + m'$ ou $m - m'$ é múltiplo comum de a e b e m é múltiplo comum de a e b , então m' é múltiplo comum de a e b .

Vimos que dois números naturais a e b possuem sempre um mmc que é um número natural. Se um dos números a ou b é nulo e o outro



é um inteiro qualquer, então esses números só admitem o zero como múltiplo comum (justifique), que será chamado do mínimo múltiplo comum (mmc) de a e b . Se a e b são ambos não nulos, mesmo que não sejam ambos positivos, então define-se o mínimo múltiplo comum (mmc) de a e b como sendo o menor múltiplo comum positivo; ou seja, o menor elemento positivo do conjunto

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}.$$

Problema 3.9. Suponha que os números 216 e 144 sejam múltiplos comuns de um determinado par de números a e b . Mostre que $\text{mmc}(a, b) \leq 72$.

SUGESTÃO: Utilize a propriedade (iv) do Problema 3.8.

3.3 Divisores

Nesta seção olharemos a noção de múltiplo sob outro ponto de vista.

Definição. Diremos que um número inteiro d é um *divisor* de outro inteiro a , se a é múltiplo de d ; ou seja, se $a = d \times c$, para algum inteiro c .

Quando a é múltiplo de d dizemos também que a é *divisível* por d ou que d *divide* a .

Representaremos o fato de um número d ser divisor de um número a , ou d dividir a , pelo símbolo $d \mid a$. Caso d não divida a , escrevemos $d \nmid a$.