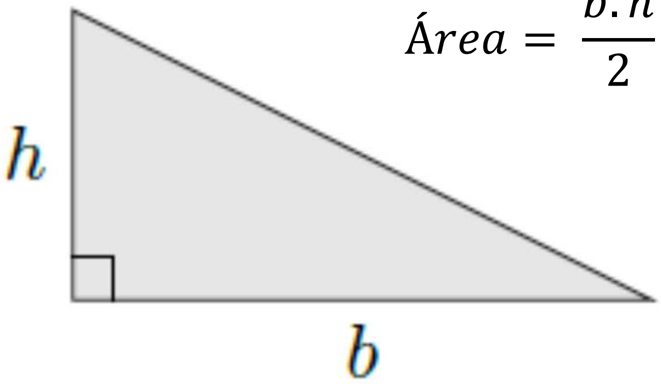
Encontro 6: Áreas e perímetros - resolução de exercícios

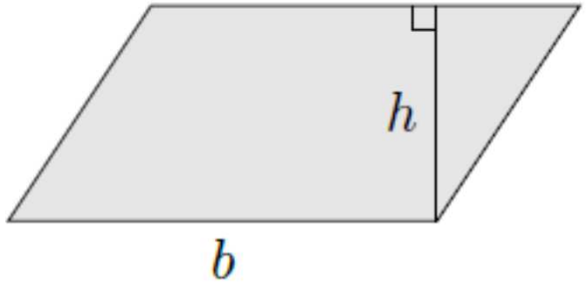
Recapitulando...

Área de um triângulo retângulo

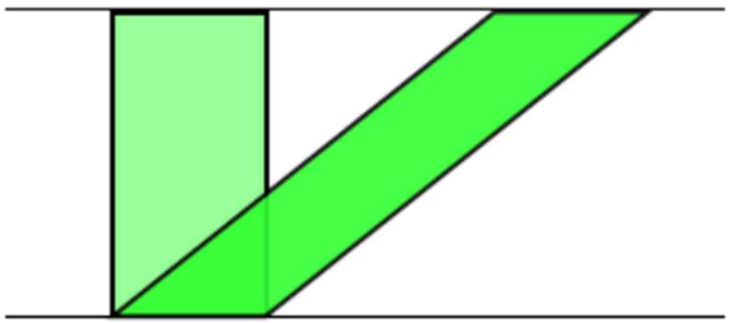
$$Área = \frac{b.h}{2}$$



Área de um paralelogramo

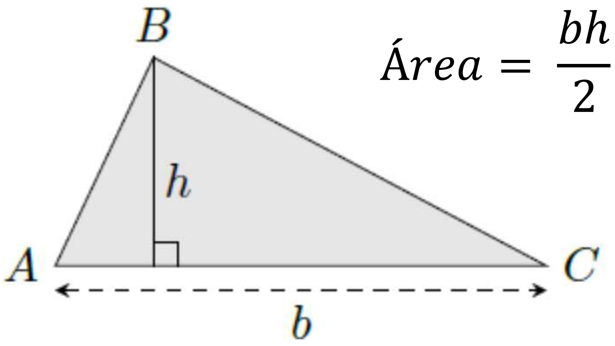


$$Área = b.h$$

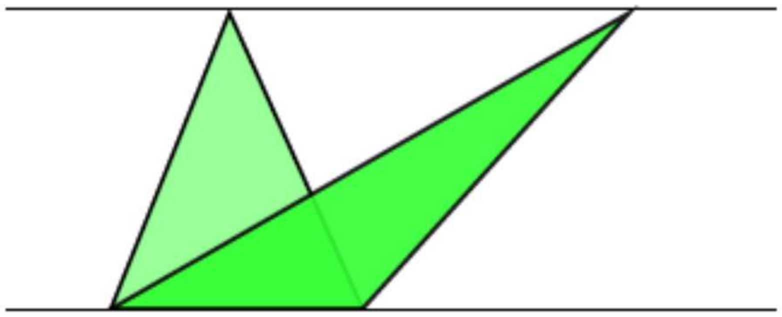


"Todos os paralelogramos de mesma base e mesma altura possuem áreas iguais."

Área de um triângulo qualquer

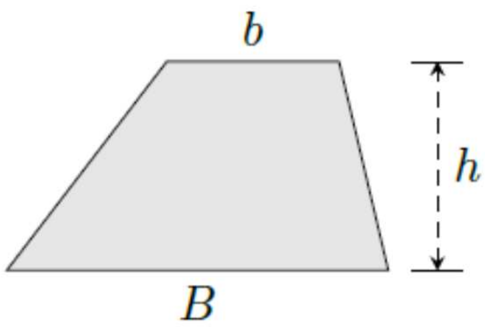


$$Área = \frac{bh}{2}$$



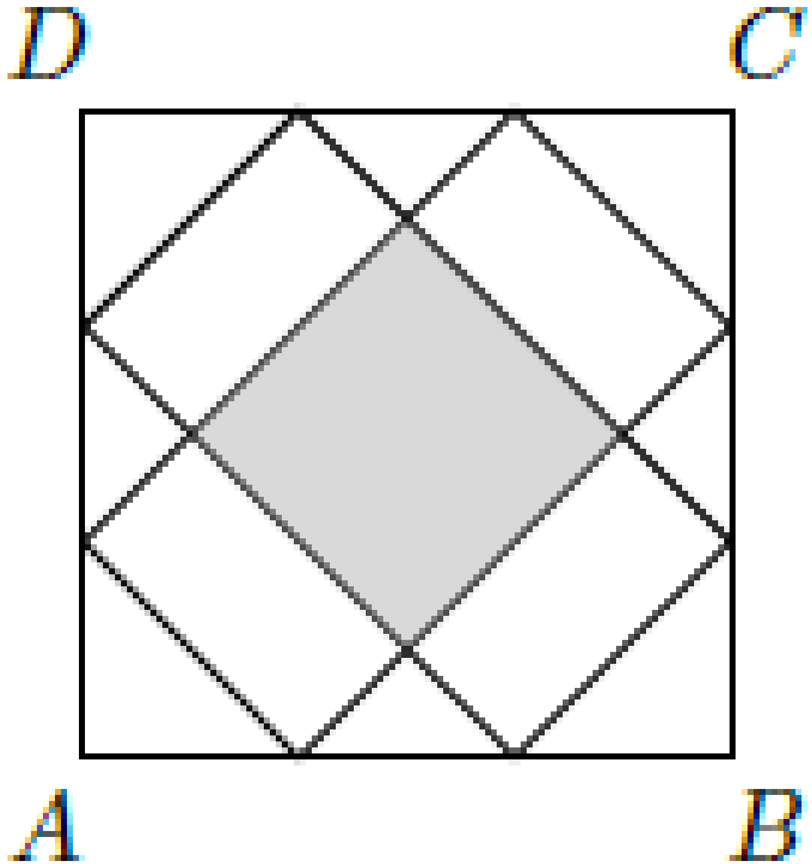
"Se dois triângulos possuem a mesma base e a mesma altura, então eles possuem a mesma área."

Área de um trapézio

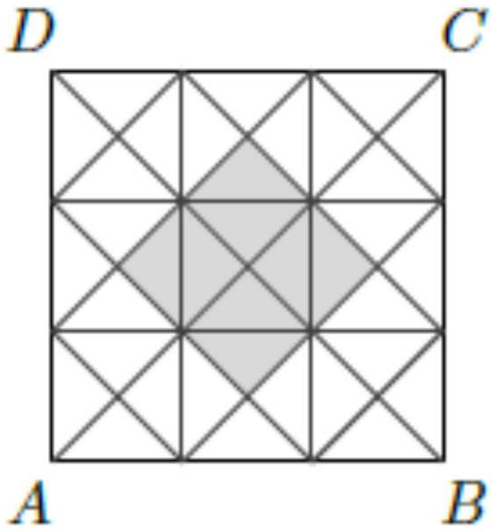


$$Área = \frac{(B+b)}{2}h$$

Exercício 1: Na figura a seguir, ABCD e um quadrado de lado 18. Sobre cada um dos seus lados estão marcados dois pontos que dividem o lado do quadrado em 3 partes iguais. Traçando alguns segmentos que unem estes pontos, foi obtida a seguinte figura. Qual é a área do quadrado sombreado?



Resolução: Desenhando vários segmentos de reta como está indicado na figura a seguir, podemos dividir o quadrado ABCD em 36 triângulos iguais.



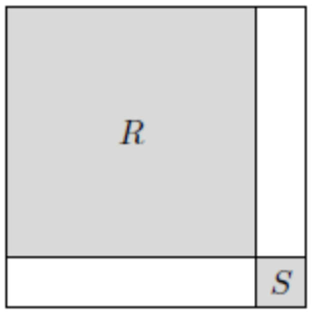
A área de cada um destes triângulos e igual a área do quadrado ABCD dividida por 36, ou seja, (18x18)/9 = 36. Como o quadrado sombreado é formado por 8 destes triângulos, a sua área e igual a 8 x 9 = 72.

Exercício 2: (OBMEP 2010 - N1Q3 – 2ª fase) A Professora Clotilde desenhou três figuras no quadro negro, todas com área igual a 108 cm^2.

(A) A primeira figura é um retângulo que tem um lado de comprimento igual a 12 cm. Qual é o perímetro deste retângulo?

(B) A segunda figura e um retângulo dividido em um retângulo branco e um quadrado cinzento de área igual a 36 cm^2, como na figura. Qual e o perímetro do retângulo branco?

(C) A terceira figura e um quadrado, que ela dividiu em dois retângulos brancos e dois quadrados cinzentos R e S, como na figura. O perímetro de um dos retângulos e três vezes o perímetro do quadrado S. Qual e a área do quadrado R?

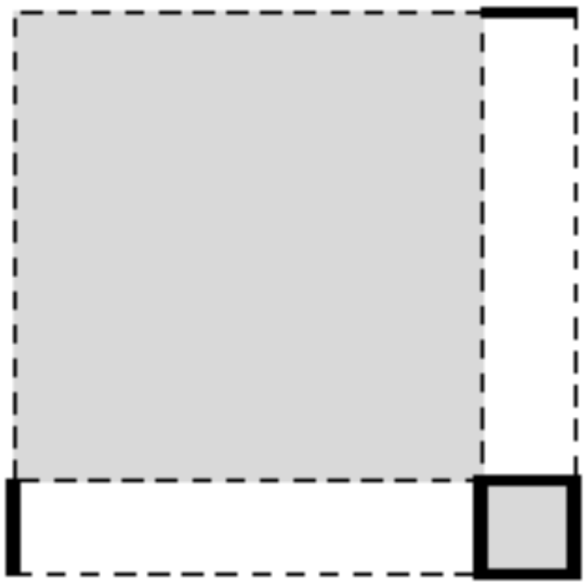


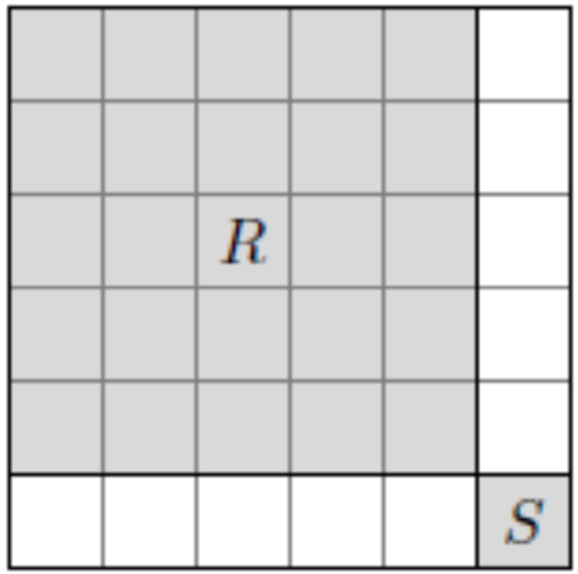
Resolução:
(A) Primeiramente vamos lembrar que a área de um retângulo pode ser calculada como o produto dos comprimentos de dois lados adjacentes. No problema, como a área do retângulo é 108 cm^2 e um lado mede 12 cm, o comprimento do lado adjacente, deve ser um número que multiplicado por 12 tenha como resultado 108, ou seja, é 108 /12 = 9. Assim, o perímetro do retângulo é 12 + 12 + 9 + 9 = 42 cm.

(B) Como o quadrado cinza tem área igual a 36 cm^2, o comprimento de seu lado é um número cujo quadrado é 36, ou seja, é igual 6 cm. Logo o retângulo maior tem um lado de comprimento 6 cm; como sua área é 108 cm^2, segue que seu outro lado mede 108 / 6 = 18 cm. Logo um lado do retângulo branco mede 6 cm e o outro mede 18 - 6 = 12 cm, e assim seu perímetro e 12 + 12 + 6 + 6 = 36 cm. Pode-se também argumentar que a área do retângulo branco e 108 - 36 = 72 cm^2. Como um de seus lados mede 6 cm, o outro mede então 72 / 6 = 12 cm; o restante da solução segue como acima.

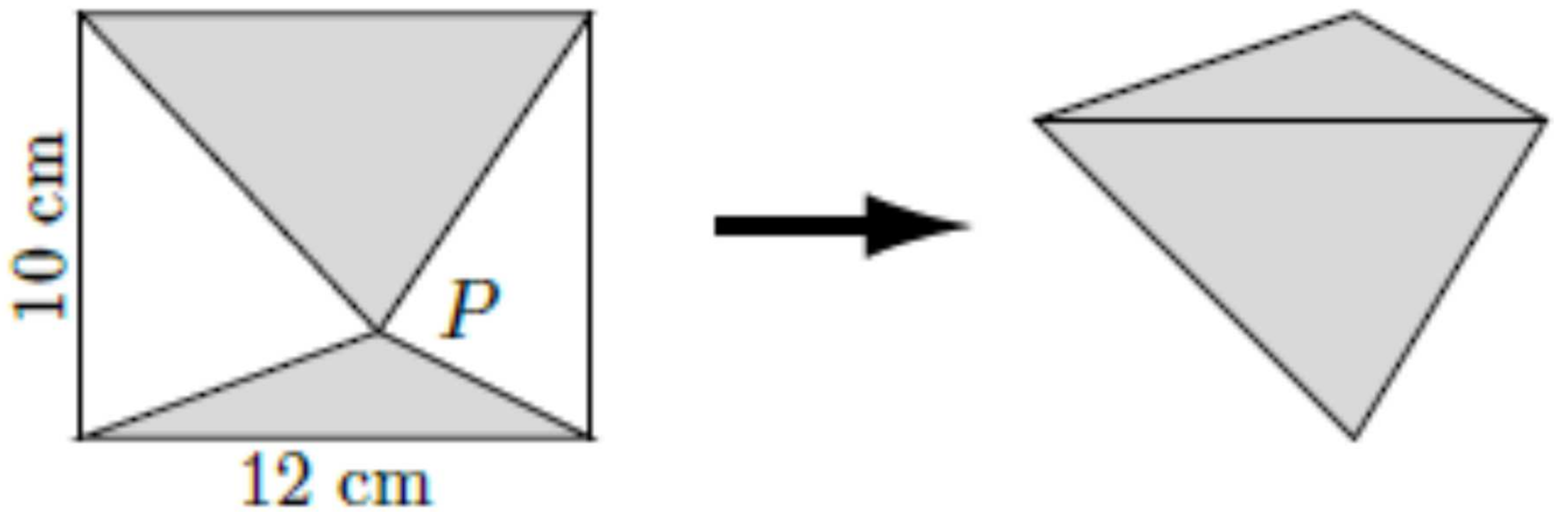
(C) Na figura a seguir, marcamos os lados do quadrado R em pontilhado e os lados do quadrado S em traço mais grosso. Para simplificar, vamos nos referir ao comprimento de um segmento grosso apenas como “grosso", e do mesmo modo para “pontilhado". O perímetro do quadrado S é igual a quatro grossos. Observamos que os retângulos brancos são iguais, pois tem os mesmos lados, e seu perímetro é igual a dois grossos mais dois pontilhados. Por outro lado, o enunciado diz que o perímetro de um destes retângulos é igual a três vezes o perímetro de S, isto é, igual a doze grossos. Logo, os dois pontilhados devem ser iguais a dez grossos, ou seja, cada pontilhado é igual a cinco grossos.

Resolução: Notamos agora que um lado do quadrado grande e igual a um grosso mais um pontilhado, ou seja, é igual a seis grossos. Podemos então decompor o quadrado grande em 6 x 6 = 36 quadradinhos iguais ao quadrado S, como na figura a seguir. Como a área do quadrado maior é igual a 108 cm^2, a área de um destes quadradinhos é igual a 108 / 36 = 3 cm^2. Finalmente, o quadrado R consiste de 5 x 5 = 25 quadradinhos e então sua área e igual a 25 x 3 = 75 cm^2:

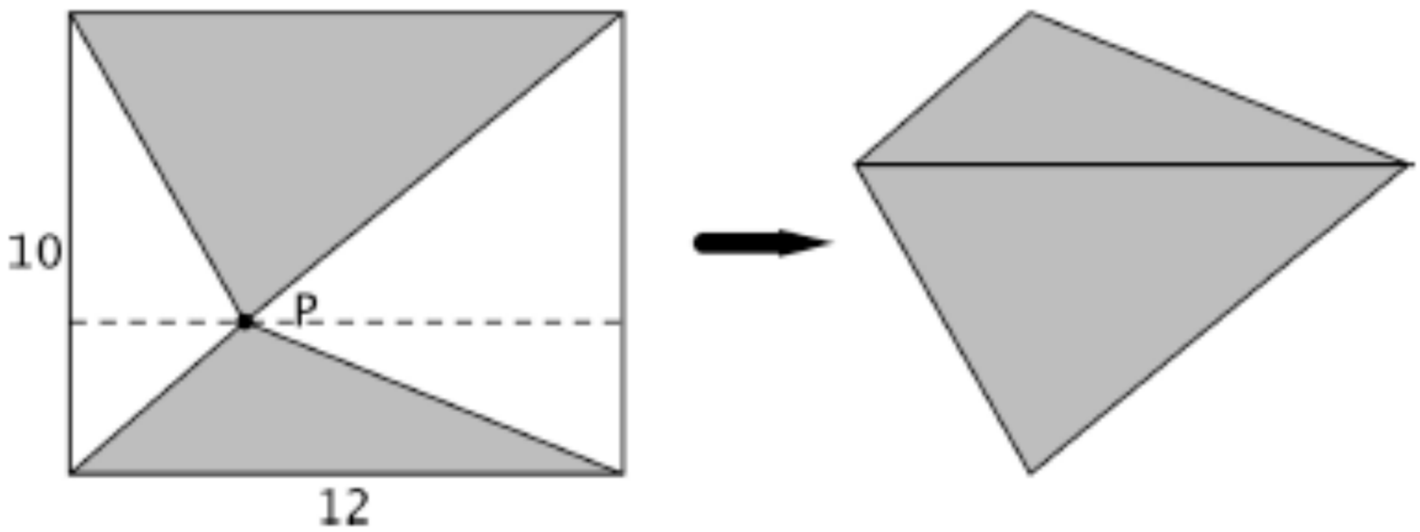




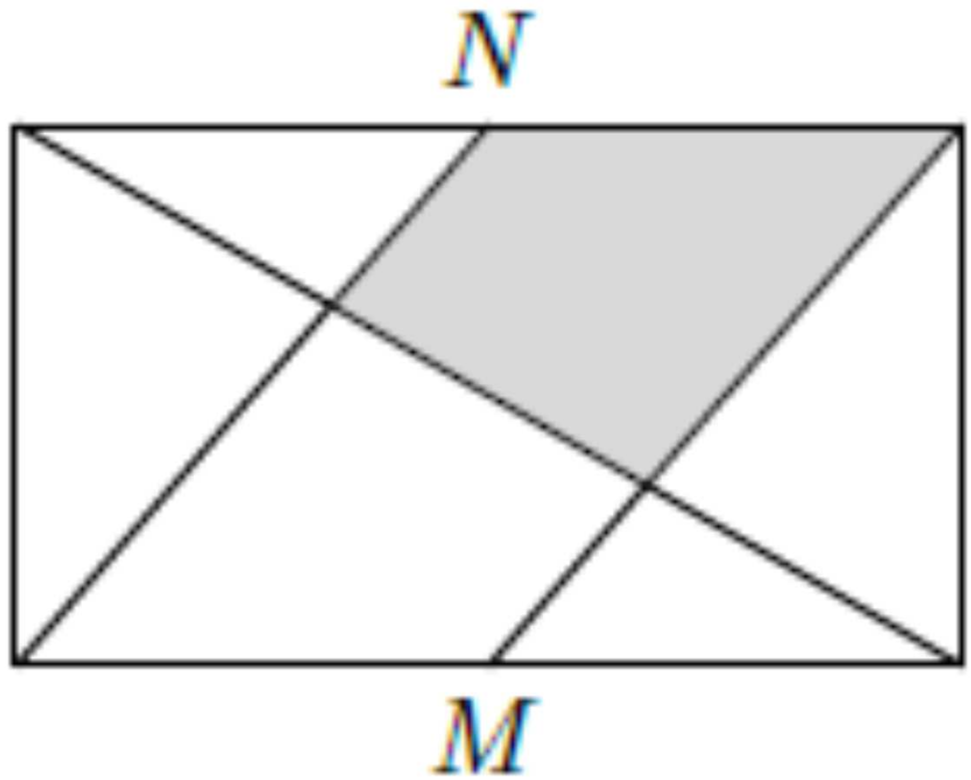
Exercício 3: (OBMEP 2013 - N2Q4 – 1ª fase) Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento 12 cm e largura 10 cm. Ela escolheu um ponto P no interior do retângulo e recortou os triângulos sombreados como na figura. Com estes triângulos, ela montou o quadrilátero da direita. Qual e a área do quadrilátero?



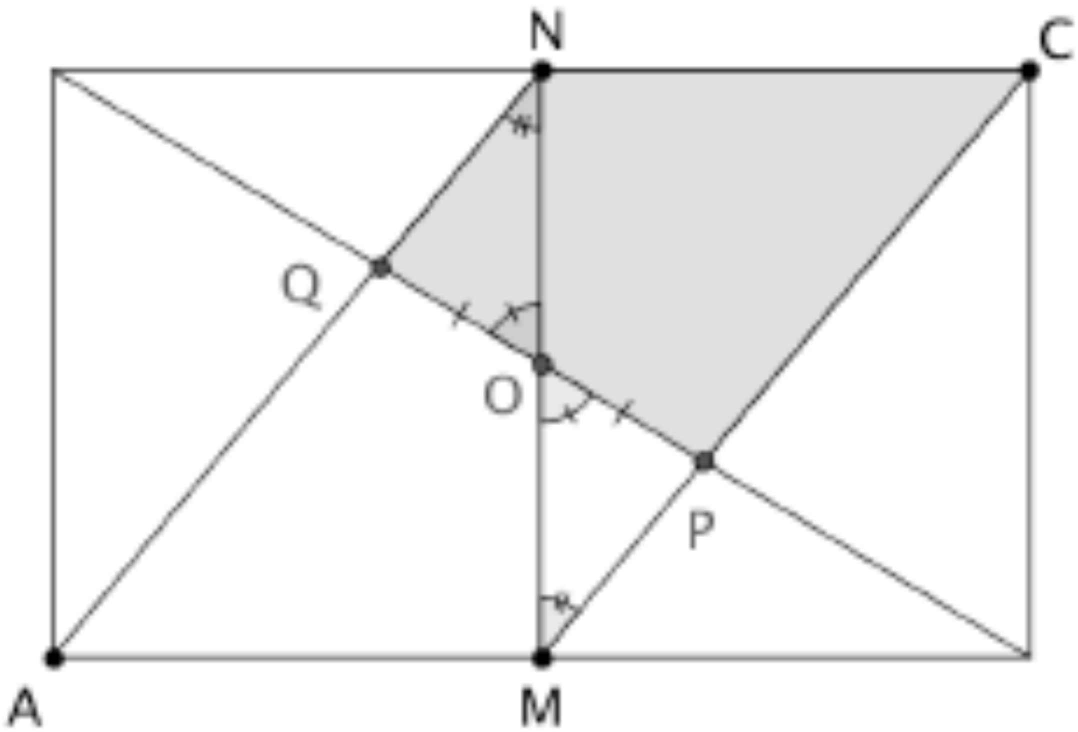
Resolução: A área do quadrilátero é a soma das áreas dos triângulos. Traçando por *P* uma paralela a um dos lados do retângulo, como na figura, este fica dividido em dois retângulos menores. A área de cada um dos triângulos é igual à metade da área do retângulo menor correspondente; como a soma das áreas dos retângulos menores é igual à área do retângulo maior, segue que a soma das áreas dos triângulos é igual à metade da área do retângulo maior, ou seja, é igual a ½ x 10 x12 = 60 cm^2; essa é a área do quadrilátero.



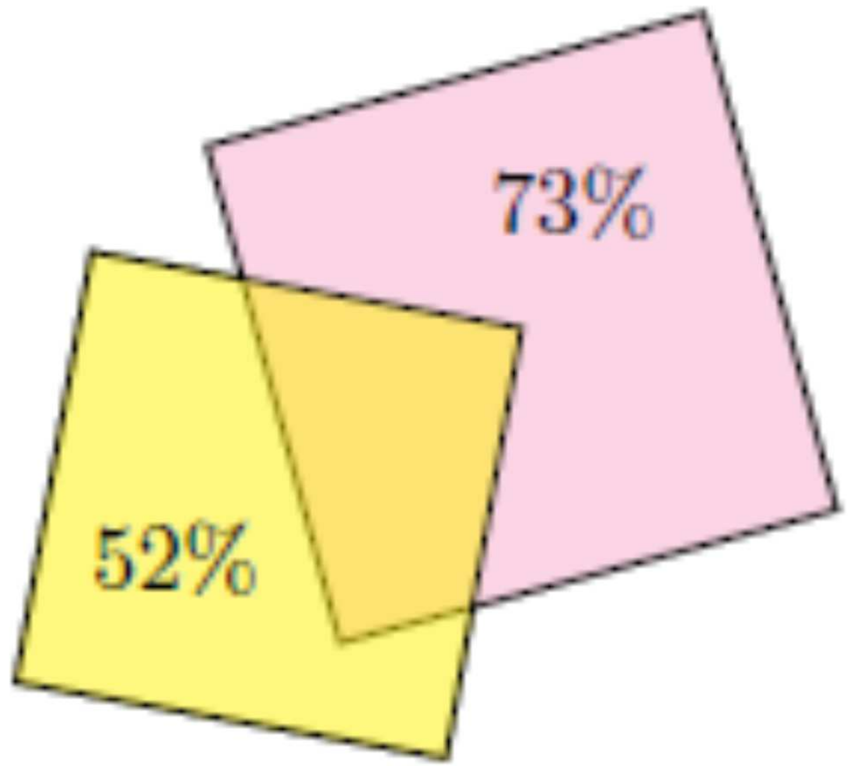
Exercício 4: (OBMEP 2013 - N2Q7 – 1ª fase) A figura representa um retângulo de 120 m^2 de área. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados a que pertencem. Qual e a área da região sombreada?



Resolução: Na figura ao lado o quadrilátero *AMCN* é um paralelogramo, pois tem os lados *AM* e *NC* paralelos e iguais. Em particular, *AN* e *MC* são paralelos; logo, os ângulos assinalados em *M e N* têm a mesma medida. Além disso, os ângulos assinalados em *O* são iguais, pois são opostos pelo vértice; além disso temos , pois *O* é o centro do retângulo. Segue pelo critério ALA que os triângulos *OMP* e *ONQ* são congruentes. A área do quadrilátero *CPQN* é então igual à área do triângulo *CMN*, que por sua vez é igual a ¼ da área do retângulo, ou seja, igual a ¼ x 120 = 30 m^2.



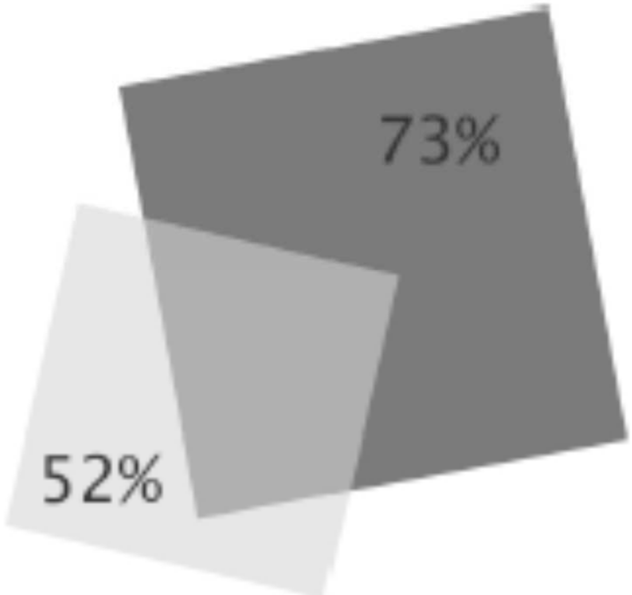
Exercício 5: (OBMEP 2013 - N2Q9 – 1ª fase) Dois quadrados de papel se sobrepõem como na figura. A região não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% de sua área é a região não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% de sua área. Qual é a razão entre o lado do quadrado menor e o lado do quadrado maior?



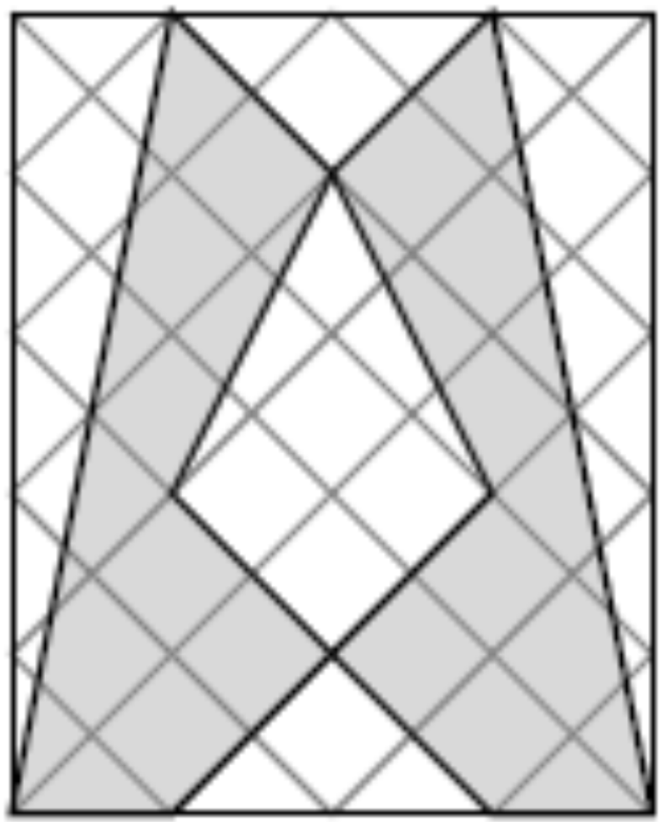
Resolução:

Vamos chamar de ℓ e L, respectivamente, os lados do quadrado menor e do quadrado maior, e de Q a área comum aos dois quadrados. Então Q corresponde a $100 - 52 = 48\%$ da área do quadrado menor e a $100 - 73 = 27\%$ da área do quadrado maior. Segue que $\frac{48}{100}\ell^2 = \frac{27}{100}L^2$; logo

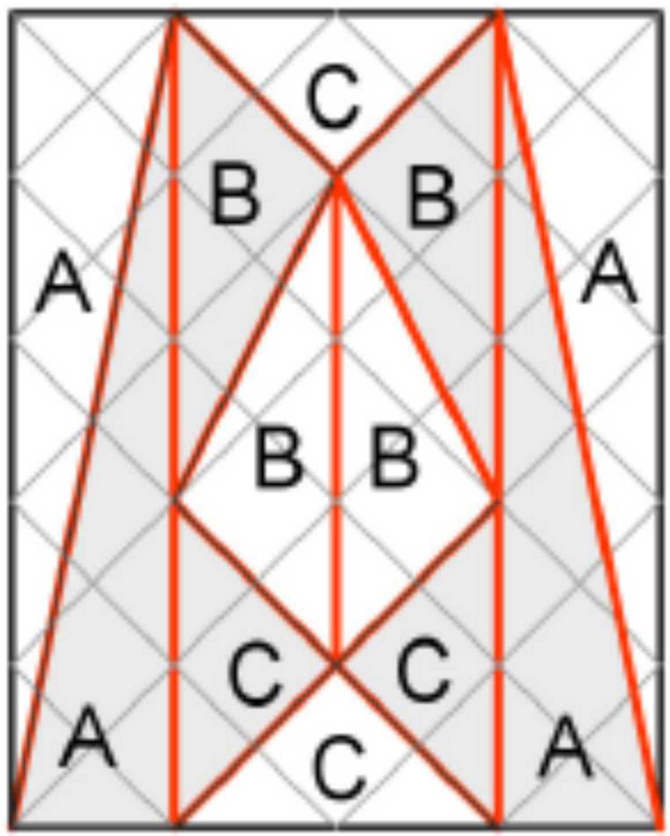
$$\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 = \frac{27}{48} = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$, ou seja, $\frac{\ell}{l} = \frac{3}{4}$.



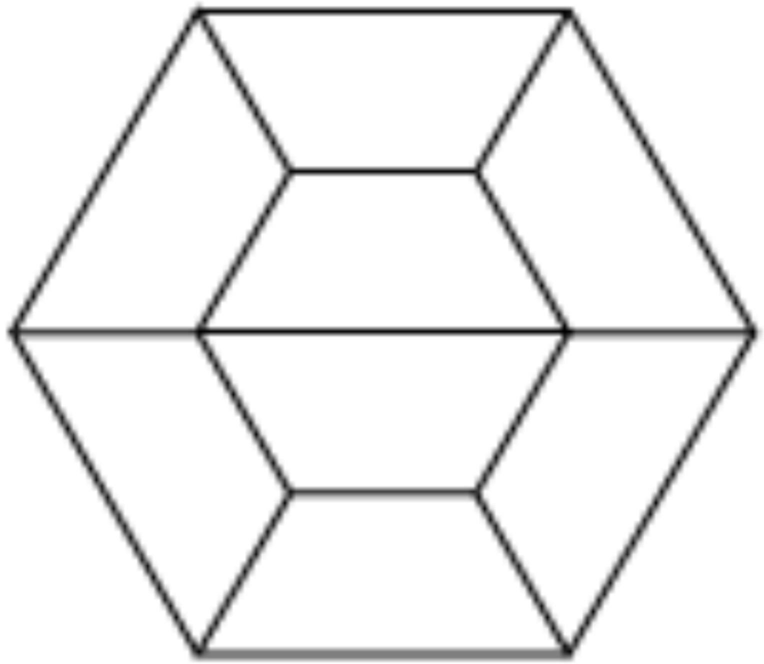
Exercício 6: (OBMEP 2012 - N1Q12 – 1ª fase) O retângulo da figura, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5 cm de altura. Qual é a área da região sombreada de cinza?



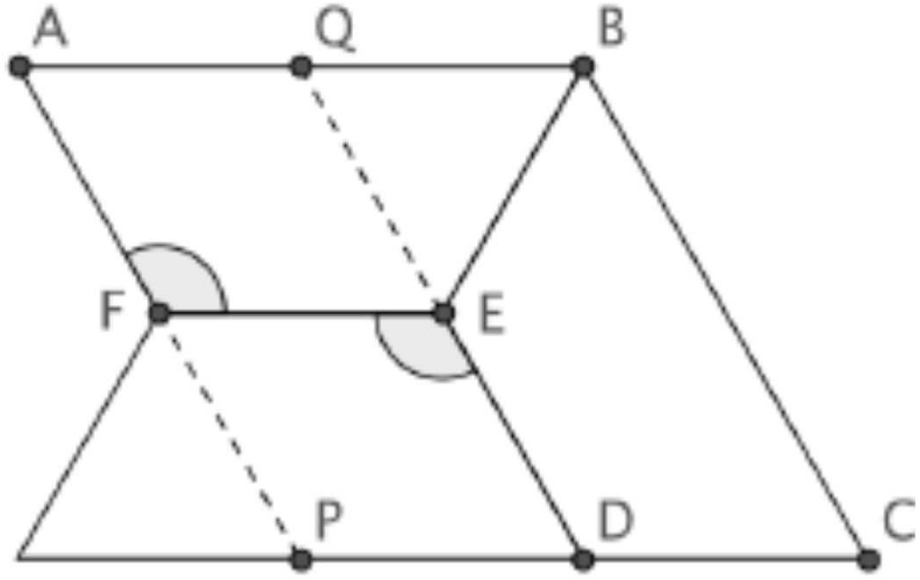
Resolução: Dividimos a figura em regiões indicadas pelas letras A, B e C, como mostrado ao lado. Regiões com a mesma letra são idênticas, e tanto a parte branca quanto a parte cinzenta consistem de duas regiões A, duas regiões B e duas regiões C; segue que a área da parte cinzenta é igual à área da parte branca.
Cada uma dessas áreas é então a metade da área total do retângulo, que é $4 \times 5 = 20$ cm^2. Logo a área da parte cinzenta é 10 cm^2.



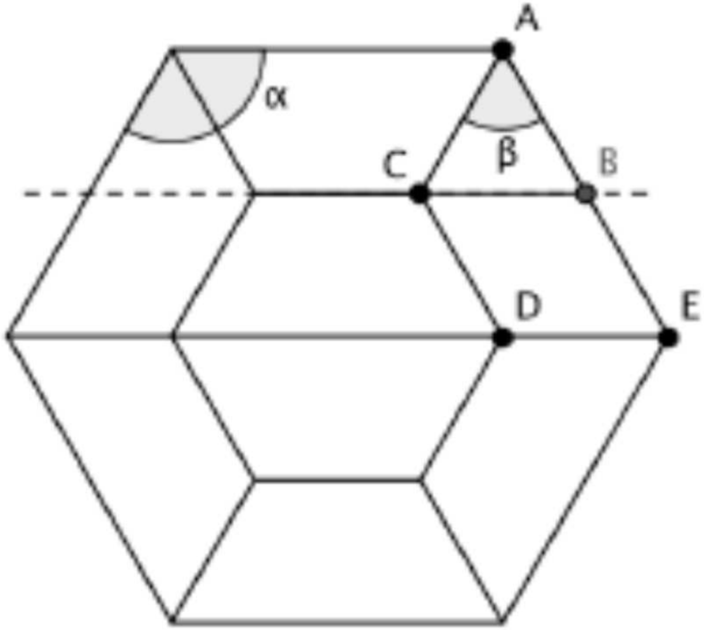
Exercício 7: (OBMEP 2012 - N2Q8 – 1ª fase) A figura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um destes trapézios?



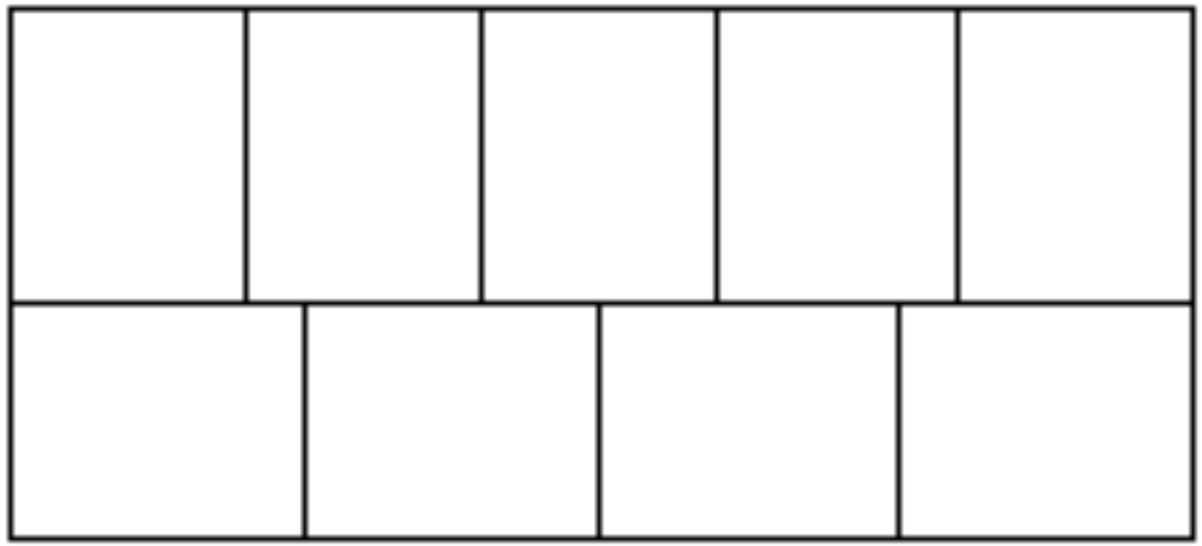
Resolução: A figura ao lado mostra uma parte do hexágono formada por três trapézios. Prolongamos os segmentos *AF* e *DE* para obter os pontos *P* e *Q*, como indicado. Como os trapézios são idênticos, os ângulos assinalados são iguais; segue que *AP* e *QD* são paralelos. Como *PD* e *EF*, sendo bases de um trapézio, também são paralelos, segue que *PDEF* é um paralelogramo; em particular, temos *PF* = *DE* . Da igualdade dos trapézios temos *AF* = *DE* = *EF* e concluímos que *AP* = 2*EF* . Notamos agora que *APCB* também é um paralelogramo; logo *BC* = *AP* = 2*EF* e como *BC* = 10 segue que *EF* = 5 .



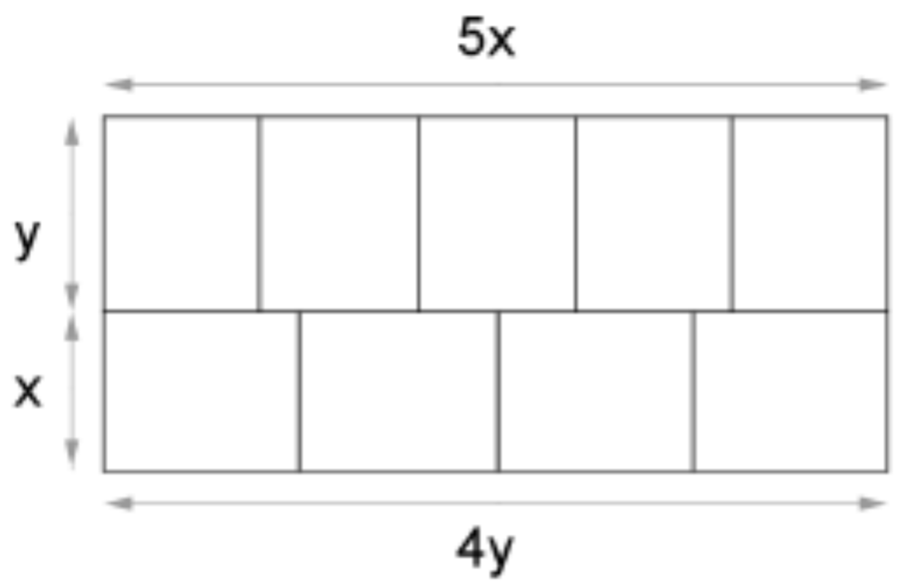
Outra solução é a seguinte. Como os trapézios são idênticos, o hexágono que eles formam é regular. Como o ângulo interno α desse hexágono mede 120° , o ângulo β mede 120°/2 = 60°. Logo o triângulo *ABC* é equilátero; como *AC* =*CD* temos *BC* = *CD* e segue que o paralelogramo *BCDE* é um losango. Assim, *B* é o ponto médio de *AE* e então *AC* = *BE* = 1/2*AE* =1/2 × 10 = 5 cm.



Exercício 8: (OBMEP 2012 - N2Q15 - 1ª fase) A figura mostra um retângulo de área 720 cm^2, formado por nove retângulos menores e iguais. Qual e o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?



Resolução: Sejam *x* e *y*, respectivamente, as medidas do lado menor e do lado maior de um dos retângulos menores. As medidas dos dois lados do retângulo maior são então *x* + *y* e 4*x* = 5*y* ; em particular, temos *y* = 4/5x.

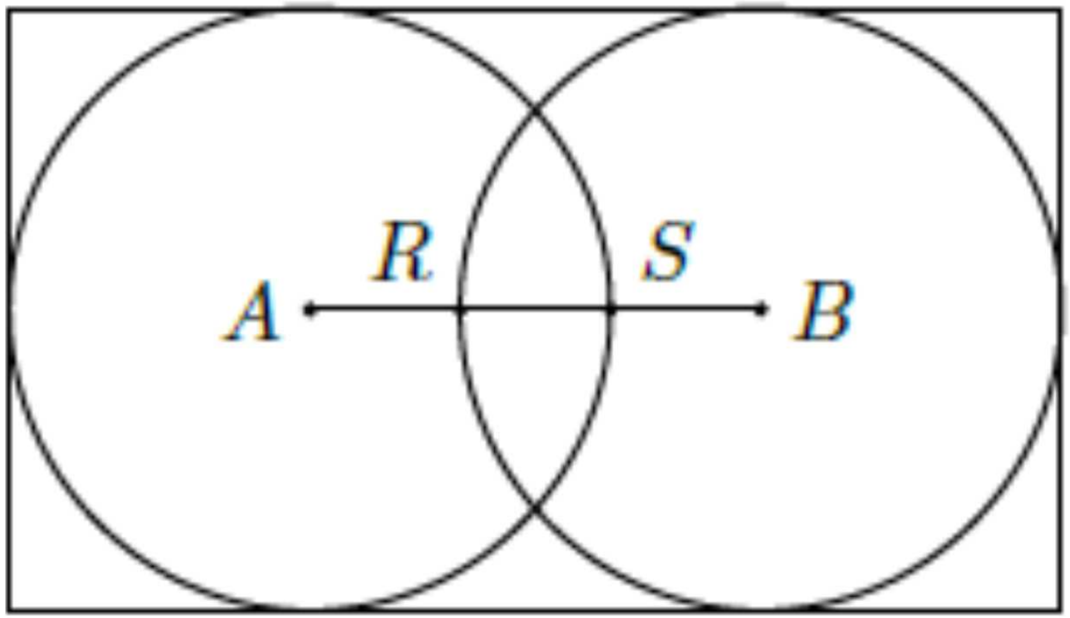


Como a área do retângulo maior é 720 cm^2, temos:

$$5x(x+y)=5x\left(x+\frac{5}{4}x\right)=\frac{45}{4}x^2=720$$

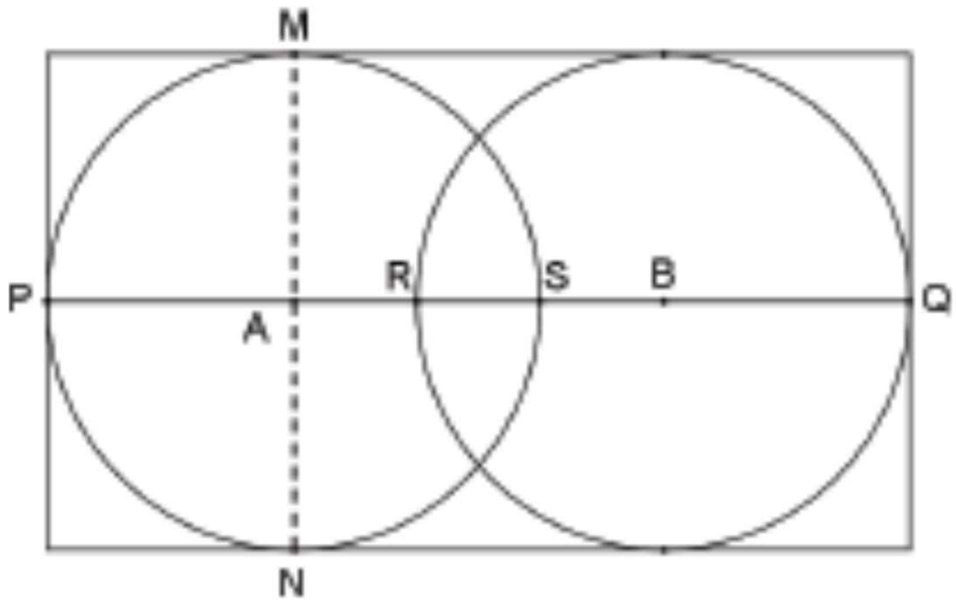
Logo *x* = 8 e *y* = 10; o perímetro de um dos retângulos menores é então 2× (8 +10) = 36cm.

Exercício 9: (OBMEP 2010 - N2Q6 – 1ª fase) Na figura as circunferências de centros A e B são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a 4 cm. A distância entre os pontos R e S e 1 cm. Qual é o perímetro do retângulo?

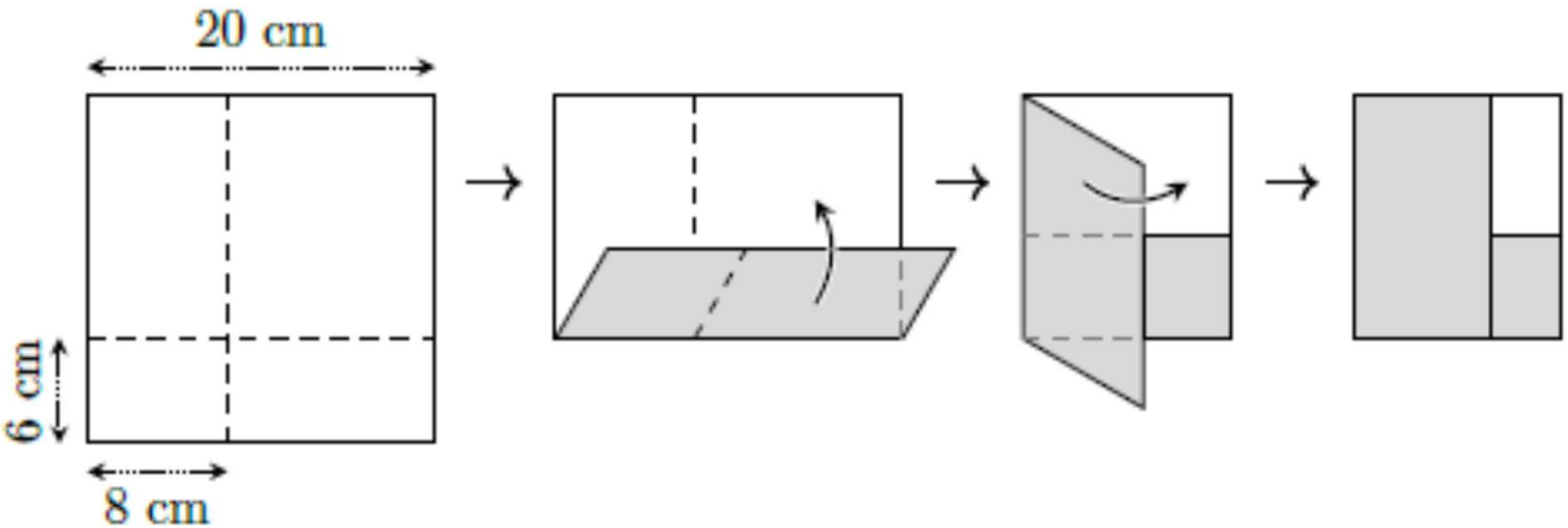


A) 16 cm
B) 18 cm
C) 20 cm
D) 22 cm
E) 24 cm

Resolução: Os segmentos AP, AS, BR e BQ são raios dos círculos, logo todos têm comprimento 2. Além disso, temos $BS = BR - RS = 1$, donde $PQ = PA + AS + SB + BQ = 2 + 2 + 1 + 2 = 7$ e vemos que os lados maiores do retângulo têm comprimento 7. Por outro lado, o comprimento dos lados menores do retângulo é igual ao comprimento de MN, que é um diâmetro do círculo, ou seja, tem comprimento 4. Logo o perímetro do retângulo é 7 + 7 + 4 + 4 = 22 cm.



Exercício 10: (OBMEP 2010 - N2Q8 – 1ª fase) Um quadrado de papel de 20 cm de lado, com a frente branca e o verso cinza, foi dobrado ao longo das linhas pontilhadas, como na figura. Qual é a área da parte branca que ficou visível?



A) 18 cm^2
B) 32 cm^2
C) 36 cm^2
D) 72 cm^2
E) 84 cm^2

Resolução: A figura mostra os comprimentos de alguns segmentos ao longo da sequência de dobras. Ao final, vemos que a região branca é um retângulo de lados de comprimento 4 cm e 8 cm; sua área é então $4 \times 8 = 32$ cm^2.