

Coordenação de Matemática – Prof. André Costa

Módulo 1 – Aritmética

Múltiplos: $M_a = a\mathbb{Z} = \{a \times d; d \in \mathbb{Z}\}$ conjunto dos múltiplos inteiros de a .

Divisor: d é divisor de a , se a é múltiplo de d ; ou seja, se $a = d \times c$, para algum c .

(a é múltiplo de d é equivalente a dizer que a é divisível por d , ou que d divide a . Representamos por $d|a$)

MMC: o menor múltiplo comum de a e b , denotado por $mmc(a, b) = [a, b] = \min(\mathbb{N} \cap a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z})$

Problema 3.8. (A.Hefez) Mostre que os múltiplos inteiros comuns de dois elementos a e b possuem as seguintes propriedades:

- (i) 0 é múltiplo comum de a e b .
- (ii) Se m é um múltiplo comum de a e b , então $-m$ é múltiplo comum de a e b .
- (iii) Um múltiplo de um múltiplo comum de a e b é um múltiplo comum de a e b .
- (iv) Se m e m' são múltiplos comuns de a e b , então $m+m'$ e $m-m'$ são também múltiplos comuns de a e b .
- (v) Se m e m' são múltiplos comuns de a e b , então $e \times m + f \times m'$ é múltiplo comum de a e b , quaisquer que sejam os inteiros e e f (note que (iv) é um caso particular da presente propriedade).
- (vi) Se $m+m'$ ou $m-m'$ é múltiplo comum de a e b e m é múltiplo comum de a e b , então m' é múltiplo comum de a e b .

Problema 3.9 (A.Hefez) Suponha que os números 216 e 144 sejam múltiplos comuns de um determinado par de números a e b . Mostre que $mmc(a, b) \leq 72$.

Problema 3.12. (A.Hefez) Enuncie critérios de divisibilidade por 3, 4, 5, 8, 9 e 10.

Primo: Um número $p > 1$ é primo se só possui 1 e o próprio p como divisores positivos.

MDC: Dados dois números inteiros a e b não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b será chamado de máximo divisor comum de a e b e denotado por $mdc(a, b) = (a, b)$.

Primos entre si: a e b são primos entre si se $(a, b) = 1$

Problema 3.13. (A.Hefez) Mostre as seguintes propriedades importantes da divisibilidade:

- (a) Se $d|a$ e $d|b$, então $d|(b+a)$ e $d|(b-a)$.
- (b) Se $d|(b+a)$ ou $d|(b-a)$ e $d|a$, então $d|b$.
- (c) Conclua que d é um divisor comum de a e de b se e somente se d é um divisor comum de a e de $b-a$, em particular, $(a, b) = (a, b-a)$.

Problema 3.16.

- (a) Mostre que dois números inteiros da forma n e $2n+1$ são sempre primos entre si.
- (b) Mostre que se n é um número ímpar, então $(n, 2n+2) = 1$.
- (c) Mostre que se n é um número par, então $(n, 2n+2) = 2$.

Algoritmo da Divisão de Euclides: Dados p e $d > 0$, inteiros, existem únicos q e r inteiros, com $0 \leq r < d$, tal que

$$p = qd + r$$

Problema 3.18/19. Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:

- (a) de 43 por 3 e de -43 por 3
- (b) de 43 por 5 e de -43 por 3
- (c) de 233 por 4 e de -233 por 4

Par ou Ímpar: O conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

Problema 3.29. Determine a paridade do seguinte número:

$$(123275 + 346231)^{234} + (3451 + 4532)^{542}$$

Problema 3.30. Mostre que para todos a inteiro e n natural não nulos, os números a e a^n têm mesma paridade.

Problema 3.31. Dado um número inteiro a e dados dois números naturais n e m , não nulos, mostre que são sempre pares os números

$$a^n + a^m \text{ e } a^n - a^m$$

Problema 3.32. Qual é a paridade da soma dos números naturais de um a 10? E de seu produto?

Lista de Problemas

1. Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 1000?

2. Resolva:

a) (Fomin, capítulo 1, problema 16) É possível trocar uma nota de 25 rublos em dez notas com valores 1, 3 ou 5 rublos?

b) (Fomin, capítulo 1, problema 17) Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990?

c.1) (Fomin, capítulo 1, problema 20) Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de "+" e de "-" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

c.2) Continuando o exercício anterior, vamos imaginar que os números de 1 a 11 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de "+" e de "-" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

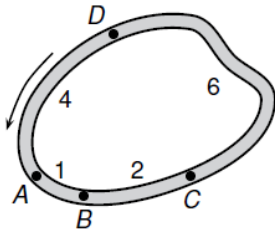
c.3) (Desafio) Mostre que sempre que a soma dos números de 1 a n é par, então é possível separar os números de 1 a n em dois subgrupos de números de igual soma.

3. Resolva:

a) (Fomin, capítulo 1, problema 8) Um tabuleiro 5×5 pode ser coberto por dominós 1×2 ?

b) (Fomin, capítulo 1, problema 23) Considere um tabuleiro de xadrez (com $8 \times 8 = 64$ casas). Suponha que você tenha peças de dominó, cada uma com o tamanho exato de duas casas do tabuleiro. Observe que, deste modo, pode-se cobrir todo o tabuleiro de xadrez com exatamente 32 peças de dominó. Quando são retiradas do tabuleiro duas casas diagonalmente opostas, ainda é possível cobri-lo com 31 peças de dominó?

4. (OBMEP/06 - 2ª fase – N3) A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 km pode ser realizada com partida em D e chegada em A.



- Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
- E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?
- Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

5. (OBMEP/07 - 2ª fase – N3) Fernando e Isaura inventaram um jogo diferente, cujas regras são as seguintes:

- eles começam uma partida com 128 palitos cada um;
- em cada jogada, eles tiram par ou ímpar; se sai par, Fernando dá metade dos palitos que tem para Isaura e, se sai ímpar, Isaura dá a metade dos palitos que tem para Fernando.
- eles repetem o procedimento da regra 2 até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com maior número de palitos.

Veja o que acontece em uma partida onde a sequência das três primeiras jogadas é **par, ímpar, par**:

Fernando 128	Isaura 128	→ par 1ª jogada →	Fernando 64	Isaura 192	→ ímpar 2ª jogada →	Fernando 160	Isaura 96	→ par 3ª jogada →	Fernando 80	Isaura 176	...
-----------------	---------------	-----------------------------	----------------	---------------	-------------------------------	-----------------	--------------	-----------------------------	----------------	---------------	-----

a) Complete o esquema com o número de palitos de Fernando e Isaura, de acordo com as jogadas indicadas.

Fernando 128	Isaura 128	→ ímpar 1ª jogada →	Fernando	Isaura	→ ímpar 2ª jogada →	Fernando	Isaura	→ par 3ª jogada →	Fernando	Isaura	...
-----------------	---------------	-------------------------------	----------	--------	-------------------------------	----------	--------	-----------------------------	----------	--------	-----

- Uma partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos. Na última jogada saiu par ou ímpar?
- Qual foi a sequência de pares e ímpares da partida que acabou quando Fernando ficou com 101 palitos?
- Mostre que qualquer partida acaba com exatamente sete jogadas.

6. (OBMEP/11 - 2ª fase – N3) Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem comprimento 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma sequência ímpar.

- Escreva a sequência que começa com 37.
- Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.
- Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?
- Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

7. (OBMEP/16 1ª fase – N3) Quantos são os números naturais n tais que $\frac{5n-12}{n-8}$ é também um número natural?

8. (IFPE) Qual número devemos somar a 1996^2 para obter 1997^2 ?

9. Sobre os números da sequência $F_n = n^5 - n$, n natural podemos afirmar que:

0-0 São múltiplos de 3.

1-1 Não podem ser múltiplos de 7.

2-2 Não são primos.

3-3 São divisíveis por 30.

4-4 São múltiplos de 4.

10. (COVEST) Sejam m e n números naturais distintos e pares tais que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$. Determine o produto de m por n .