

Avaliação Presencial – Ciclo 2 – 11º PIC – N1

Professores,

Esta avaliação presencial é constituída de três questões e tem pontuação total máxima de 10 pontos, distribuídos do seguinte modo:

- Questão 1 – três pontos
- Questão 2 – três pontos
- Questão 3 – quatro pontos

Reproduza as questões em uma folha para ser distribuída para os alunos medalhistas e os alunos convidados e corrija cada questão de acordo com o critério de correção apresentado. Caso algum aluno apresente uma solução que não esteja contemplada no critério de pontuação sugerido, procure estabelecer alguma coerência com as sugestões de pontuações apresentadas.

Qualquer dúvida, escreva na sala dos POs no Fórum Hotel de Hilbert.

Agradecemos quaisquer comentários e observações sobre as questões, as soluções e os critérios de pontuação definidos.

Um grande abraço

Coordenadores de Fórum.

Questão 1: Os números naturais estão escritos em uma tabela com 6 colunas e muitas linhas, como indicado na figura a seguir. Observe que começamos escrevendo os números da esquerda para a direita. Quando chegamos na última coluna, vamos para a linha de baixo e escrevemos os números da direita para a esquerda. E quando chegamos na primeira coluna, descemos uma linha e vamos da esquerda para a direita, e assim por diante.

	A	B	C	D	E	F
Linha 1	1	2	3	4	5	6
Linha 2	12	11	10	9	8	7
Linha 3	13	14	15	16	17	18
Linha 4	24	23	22	21	20	19
Linha 5	25	26	27	28	29	30
Linha 6	36	35	34	33	32	31
Linha 7	37	38				
Linha 8						

Em qual linha e em qual coluna está escrito o número 1234?

Solução. Observe que os múltiplos de 12 sempre estão escritos na coluna A. Além disso, observe que a partir de um múltiplo de 12 sempre estamos fazendo o mesmo trajeto na tabela: descemos uma linha e vamos para a direita.

$12 = 12 \times 1$ esta na linha 2.

$24 = 12 \times 2$ esta na linha 4.

$36 = 12 \times 3$ esta na linha 6.

Continuando deste modo vemos que o número $12n$ esta escrito na linha $2n$.

Dividindo 1234 por 12 obtemos quociente 102 e resto 10. Isto significa que $1224 = 12 \times 102$ é o maior múltiplo de 12 que é menor que 1234. Sabemos que esse número esta escrito na linha $2 \times 102 = 204$ e na coluna A. Para determinar a posição do número 1234 é suficiente então avançar 10 unidades a partir da posição do número 1224.

	A	B	C	D	E	F
Linha 204	1224					
Linha 205	1225	1226	1227	1228	1229	1230
Linha 206			1234	1233	1232	1231

Então o número 1234 esta na linha 206 e na coluna C.

Critérios de Pontuação da questão 1.

Esta questão vale 3 pontos, distribuídos do seguinte modo.

- Observar que de duas em duas linhas, ou de doze em doze números, existe uma periodicidade (1 ponto).
- Determinar a linha 206 em que está o número 1234. (1 ponto)
- Determinar a coluna C em que está o número 1234. (1 ponto)

Questão 2: A tabela a seguir possui cinco linhas e cinco colunas e dentro desta tabela queremos colocar as letras da palavra **OBMEP** de modo que em cada linha e em cada coluna esteja escrita uma única letra.

	1	2	3	4	5
1			O		
2					E
3	B				
4				P	
5		M			

Por exemplo, a tabela da figura já está preenchida de um dos vários modos possíveis. Neste exemplo, a letra **B** está na linha 3 e na coluna 1; a letra **M** está na linha 5 e na coluna 2; a letra **O** está na linha 1 e na coluna 3; a letra **P** está na linha 4 e na coluna 4; e a letra **E** está na linha 2 e na coluna 5.

De quantos modos podemos dispor as letras da palavra OBMEP nesta tabela desse modo?

Solução: Vamos utilizar o princípio multiplicativo.

- A letra **O** pode ser colocada em qualquer uma das 25 casas da tabela.
- Depois de colocada a letra **O**, devemos eliminar a linha e a coluna da letra **O**. Sobram então 16 lugares onde pode ser colocada a letra **B**.
- Colocada a letra **B**, devemos apagar novamente a linha e a coluna da letra **B**. Sobram então 9 lugares onde podemos colocar a letra **M**.
- Agora, depois de colocada a letra **M**, devemos apagar a linha e a coluna da letra **M**. Sobram 4 posições para colocarmos a letra **E**.
- E finalmente, depois de apagada a linha e a coluna da letra **E**, sobra uma única posição onde pode ser colocada a letra **P**.

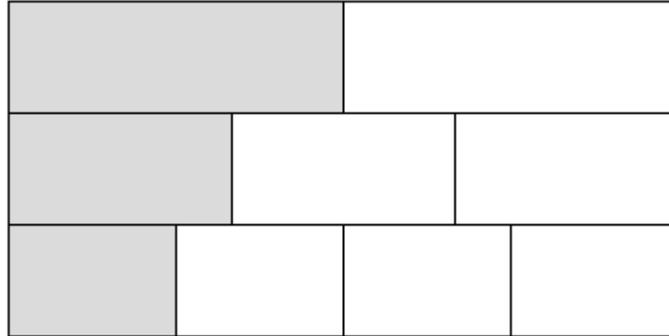
Pelo princípio multiplicativo, temos então $25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1 = 14400$ maneiras diferentes de dispor as letras da palavra OBMEP na tabela, de modo que em cada linha e em cada coluna esteja escrita uma única letra.

Critério de pontuação da questão 2.

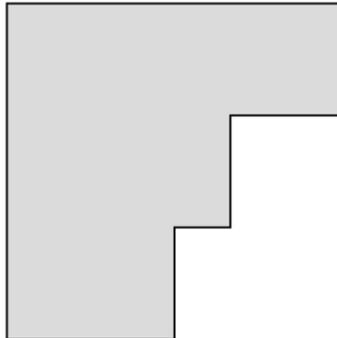
Esta questão vale 3 pontos, distribuídos do seguinte modo.

- Atribuir 1 ponto para o aluno que percebeu que ele pode colocar a primeira letra em qualquer uma das 25 casas do tabuleiro.
- Atribuir 1 ponto caso o aluno tenha entendido que a cada letra que colocamos o quadrado diminui em uma linha e em uma coluna. No começo temos um quadrado 5x5. Para a segunda letra, temos um quadrado 4x4. Para a terceira letra, temos um quadrado 3x3. Para a quarta letra, temos um quadrado 2x2. E para a última letra, temos uma única casa 1x1.
- Atribuir um ponto para o uso do princípio multiplicativo para a obtenção da resposta final $25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1 = 14400$.

Questão 3: A figura representa um retângulo de base 24 e de altura 6, dividido em três faixas de mesma altura. Cada uma das faixas está dividida em retângulos iguais: a primeira em dois retângulos, a segunda em três e a terceira em quatro retângulos.



Em cada faixa está colorido de cinza o primeiro retângulo da faixa. Estes três retângulos cinza formam a figura a seguir.

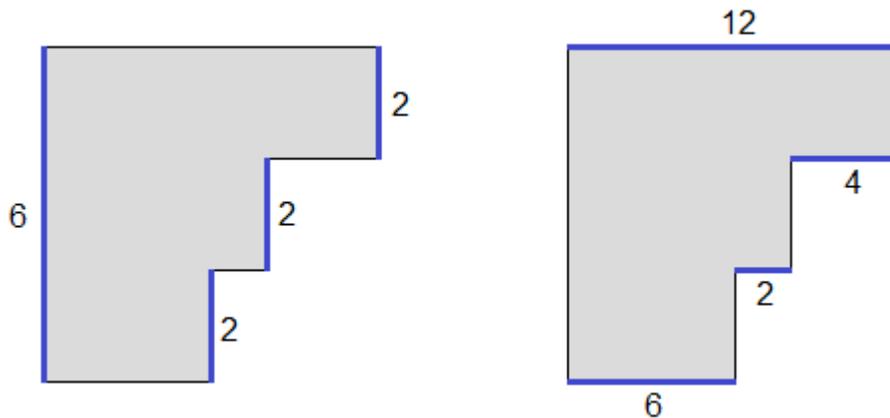


- (a) Qual é a área desta figura?
- (b) Qual é o perímetro desta figura?

Solução:

- (a) O retângulo tem área igual a $24 \times 6 = 144$. Cada uma das faixas tem área igual a $\frac{144}{3} = 48$. Cada retângulo da primeira faixa tem área igual a $\frac{48}{2} = 24$. Cada retângulo da segunda faixa tem área igual a $\frac{48}{3} = 16$. E cada retângulo da terceira faixa tem área igual a $\frac{48}{4} = 12$. Como a figura é formada um retângulo de cada faixa, a área da figura é igual a $24 + 16 + 12 = 52$.

- (b) As figuras a seguir mostram os comprimentos dos segmentos verticais e horizontais que formam o contorno da figura.



A soma dos segmentos verticais é $6 + 2 + 2 + 2 = 2 \times 6 = 12$.
A soma dos segmentos horizontais é $12 + 4 + 2 + 6 = 2 \times 12 = 24$.
O perímetro é igual a $12 + 24 = 36$.

Critério de pontuação da questão 3.

Esta questão vale 4 pontos, distribuídos do seguinte modo.

Cada item vale 2 pontos.