2º Encontro: Contagem

Frequentemente estamos interessados em contar o número de maneiras em que determinadas ações podem ser executadas. De quantas maneiras podemos nos vestir? De quantas formas podemos viajar de uma cidade para outra? De quantas formas podemos combinar as opções de comida para montar o cardápio de um jantar? Uma maneira simples de contar é fazer uma lista com todas as possibilidades e contá-las uma a uma. Contudo, isso é pouco eficiente e é muito comum que o número de possibilidades seja tão grande que isso se torna até impossível. Por exemplo, de quantas formas podemos escolher as três letras e os quatro números para montar uma placa de carro? Ou como calcular o número de maneiras de preencher um cartão da Mega-Sena?
Há métodos eficientes de realizarmos esses tipos de contagens, e apresentaremos alguns deles ao longo desta e das próximas aulas. A grande maioria desses métodos baseia-se direta ou indiretamente, no chamado "***Princípio Fundamental da Contagem***". Comecemos com um exemplo ilustrativo desse princípio.

Digamos que você possui 3 camisas e 2 calças sociais. De quantas maneiras diferentes você pode se vestir (escolhendo exatamente uma das camisas e uma das calça?

Veja que você vai executar duas ações:
(**i**) escolher a camisa ***e*** (**ii**) escolher a calça.

*A ação (**i**) pode ser executada de 3 maneiras diferentes e, para cada uma dessas maneiras, você poderá executar a ação (**ii**) de 2 maneiras diferentes. Dessa forma, o número total de maneiras de executar ambas as ações será* ***3 · 2 = 6****. Uma método simples para visualizar todas as possíveis sequências de ações ou escolhas tomadas é construindo uma árvore de decisão, como a da Figura 1.*

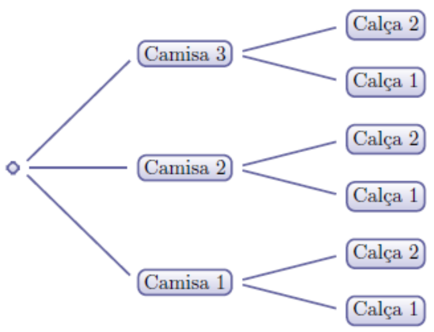


Figura 1: Uma árvore de decisão na qual se considera duas perguntas: (i) "qual camisa vestir" e (ii) "qual calça vestir" (após escolher a camisa).

Exemplo 1. Para montar um sanduíche em uma lanchonete, o cliente deve escolher exatamente um tipo pão, um tipo de carne e um tipo de queijo. Sabe-se que existem três opções para o pão (baquete, pão de forma ou pão árabe), duas opções para a carne (hambúrguer ou frango) e três opções para o queijo (mozzarella, cheddar ou suíço). Calcule quantos sanduíches diferentes é possível montar?

Solução. *Veja que o cliente precisará tomar 3 decisões: (i) escolher o tipo de pão; (ii) escolher o tipo de recheio; (iii) escolher o tipo de queijo. Há 3 possibilidades para a escolha do pão e, para cada uma delas, há 2 possibilidades para a escolha da carne. Além disso, agora, para cada uma dessas 2 · 3 possibilidades para escolha de pão e carne, há ainda 3 possibilidades para a escolha do queijo. Isso totaliza (2 · 3) · 3 = 18 maneiras de montar o sanduíche.*

O ***Princípio Fundamental da Contagem*** generaliza os raciocínios acima para situações onde duas ou mais ações ou escolhas precisem ser executadas

> Se desejamos executar uma sequência de ***n*** ações, onde a primeira ação pode ser executada de m_1 maneiras, a segunda de m_2 maneiras, então o número total de maneiras de executar essa sequência de ações é igual ao produto $m_1 \, . \, m_2$.

Esse princípio estende-se, também, para situações que ocorrem em três ações (como no exemplo 1) ou mais.

Devido à sua própria formulação, o ***Princípio Fundamental da Contagem*** também é, muitas vezes, chamado de ***Princípio Multiplicativo***.

Uma dica importante: *para realizar uma contagem qualquer, uma estratégia interessante é nos colocarmos na posição da pessoa que está realizando as ações ou escolhas envolvidas. E, no caso em que queremos contar o número de objetos de um certo conjunto, devemos sempre nos perguntar qual a sequência de ações que devemos realizar para construir ou selecionar, de maneira única, cada um dos possíveis objetos do conjunto. Por exemplo, para montar o sanduíche do exemplo anterior, as ações eram: escolher o pão, escolher a carne e escolher o queijo.*

No exemplo a seguir, já temos uma situação onde É impraticável listar todas as soluções, ou mesmo desenhar toda a árvore de decisão (mas ainda é possível imaginá-la).

Exemplo 2. De quantas formas podemos escolher os símbolos de uma placa de carro, sabendo que ela deve ser composta por 3 letras (escolhidas de um alfabeto com um total de 26 letras) e 4 dígitos (cada um no intervalo de 0 a 9)?

Solução. *Vamos nos colocar na posição de alguém que está montando a placa. Para montá-la é preciso fazer sete ações independentes. As ações consistem em escolher qual será: (1) a primeira letra, (2) a segunda letra, (3) a terceira letra, (4) o primeiro dígito, (5) o segundo dígito, (6), o terceiro dígito, (7) o quarto dígito. Dessa forma, pelo* ***Princípio Fundamental da Contagem****, o número total de maneiras de executar todas essas escolhas é igual a*

$$26 \,.\, 26 \,.\, 26 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 = 26^3 \,.\, 10^4 = 175.760.000.$$

Exemplo 3. Quantos são os números naturais de 200 a 999, tais que todos os seus algarismos:

(a) pertencem ao conjunto A = {1, 4, 7, 9}?
(b) pertencem ao conjunto A = {1, 4, 7, 9} e são distintos?

Solução. *(**a**) Para formar o número de 3 algarismos precisamos tomar apenas 3 decisões: (i) qual será seu algarismo da casa das centenas, (ii) qual será seu algarismo da casa das dezenas, (iii) qual será seu algarismo das unidades.*

*Como devemos montar um número de 200 a 999, seu algarismo das centenas não poderá ser igual a 1; e, como todos os algarismos devem pertencer ao conjunto A, temos apenas três possíveis valores (4, 7 ou 9) para o dígito da centenas. das dezenas e das unidades podem ser quaisquer elementos de A. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, a quantidade de maneiras de formar um número com as propriedades indicadas é igual **3.4.4 = 48**.*

*(**b**) Vejamos, agora, como responder a segunda pergunta. Temos que tomar as mesmas decisões (i), (ii) e (iii) do item anterior, com a restrição adicional de que não podemos escolher um mesmo algarismo duas vezes. Para tanto, veja que, como antes, temos 3 possíveis escolhas para o algarismo das centenas. Entretanto, ao escolhermos o algarismos das dezenas, temos que tomar o cuidado para que esse algarismo seja diferente do algarismo das centenas, agora já escolhido. Sendo assim, dos 4 possíveis elementos de A, apenas 3 deles podem ser usados (temos que descontar aquele elemento que já foi escolhido como algarismo das centenas!). Portanto, 3. Prosseguindo com esse raciocínio, vemos que existem 2 possibilidades para o algarismo das unidades, pois este deve pertencer a A e deve ser diferente dos outros dois algarismos já escolhidos. Logo, concluímos, então, que a quantidade de números que podemos formar é **3.3.2 = 18**.*

Exemplo 4. Quantas são as sequências (a_1, a_2, ... , a_7), de números naturais distintos e tais que, para cada i de 1 a 7, tenhamos i ≤ ai ≤ 9?

Solução. *Vamos contar a quantidade de tais sequências calculando, para cada i = 1, 2, ... , 7, a quantidade de valores que* $\mathbf{a_i}$ *pode assumir. Lembre-se de que* a_1, a_2, ... , a_7 *devem ser distintos; portanto, os valores que* $\mathbf{a_i}$ *pode assumir dependerão de quais outros valores já foram atribuídos para as variáveis já escolhidas. Precisamos, então, escolher uma ordem para as escolhas que iremos realizar (ou seja, decidir qual* $\mathbf{a_i}$ *escolheremos primeiro). Veja que a variável com o conjunto de possíveis valores mais restrito é* a_7 *(como deve ser* $7 \leq a_7 \leq 9$, a_7 *só pode ser igual a 7, 8 ou 9), seguida pelas variáveis* a_6, a_5, ..., a_1, *nessa ordem. Sendo assim, essa será a ordem que utilizaremos para as escolhas.*
Como acabamos de ver, existem 3 possíveis valores para a_7. *Tendo escolhido* a_7, *veja que, dos 4 valores inicialmente disponíveis para* a_6, *um já foi usado por* a_7 *(pois* $\{7, 8, 9\} \subset \{6, 7, 8, 9\}$*). Logo, temos apenas 3 possíveis valores ainda disponíveis para* a_6. *De modo análogo, ao escolher* a_5, *dos 5 valores inicialmente disponíveis, um deles foi usado por* a_6 *e outro por* a_7 *e, portanto, há apenas 3 valores ainda disponíveis para* a_5. *Seguindo esse raciocínio, vemos que há apenas 3 valores disponíveis para cada uma das variáveis seguintes, no momento de suas escolhas. Dessa forma, pelo Princípio Fundamental da Contagem, concluímos que há um total de* $3^7 = 2187$ *escolhas para a sequência de variáveis* (a_1, a_2, ... , a_7).

Ao realizar uma contagem, muitas vezes ocorre de não ser possível aplicar diretamente o **Princípio Multiplicativo**. Isso acontece quando nossa árvore de decisão é *assimétrica*, ou seja, quando a quantidade de escolhas para um certa ação muda de acordo com as ações tomadas anteriormente. Em uma situação como essa, uma ótima ideia ´e tentar dividir o problema em vários casos. Vejamos um exemplo.

Exemplo 5. Digamos que você deseja comprar um computador, mas está em dúvida sobre qual marca, modelo e cor irá escolher. Há apenas duas marcas, que chamaremos de Marca **A** e Marca **B**, pelas quais você se interessa. A Marca **A** tem à disposição três modelos e cada um desses pode ser comprado em quatro possíveis cores. Já a Marca **B** oferece dois modelos, tais que, para cada um, há duas possíveis escolhas de cor. De quantas maneiras diferentes você pode realizar a compra?

Solução. *Veja que temos que tomar três decisões: (**i**) a marca, (**ii**) o modelo, (**iii**) a cor. Contudo, diferentemente dos exemplos das seções anteriores, não é verdade que, para cada possível marca, o número de modelos e cores disponíveis será o mesmo. Aqui, o que podemos observar é que o problema se divide naturalmente em dois casos:*

*(i) ou compraremos um computador da Marca **A**;*
*(ii) ou compraremos um computador da Marca **B**.*

*Se decidirmos comprar um computador da Marca **A**, teremos, pelo **Princípio Fundamental da Contagem**,* $3 \cdot 4 = 12$ *possíveis escolhas para o modelo e a cor. Já se comprarmos um computador da Marca **B**, teremos, de forma semelhante,* $2 \cdot 2 = 4$ *possíveis escolhas para o modelo e a cor. Note que as ações “comprar da Marca **A**” ou “comprar da Marca **B**” não irão ser executadas de forma sequencial. Na verdade, elas são ações excludentes (i.e., a opção por uma delas exclui a outra), de forma que iremos executar exatamente uma delas: ou iremos comprar uma das 12 opções oferecidas pela Marca **A** ou uma das 4 oferecidas pela Marca **B**. Sendo esse o caso, fica claro que devemos somar os valores 12 e 4. O resultado é que existem **16 maneiras de realizar a compra**.*

Podemos resumir a técnica adotada na solução do exemplo anterior, conhecida como o **Princípio Aditivo de contagem**, da seguinte maneira.

> Se há duas **hipóteses** para a ocorrência de um fato, com **m** opções para a primeira e **n** opções para a segunda hipótese (sem que haja opção repetida), então o fato pode ocorrer de **m + n** maneiras diferentes.

Contando pelo complementar

Nesta seção exploramos brevemente o seguinte fato curioso e bastante útil: muitas vezes, é mais fácil contar o número de maneiras que certa situação tem de ***não acontecer*** do que o número de maneiras que ela tem de ***acontecer***. Ou, de forma semelhante, no lugar de contar diretamente o número de objetos de um certo tipo, podemos tentar contar primeiro o número de objetos que ***não são*** desse tipo e, em seguida, subtrair este valor do total de objetos (que muitas vezes é fácil de calcular); ao proceder assim, ainda obteremos como resultado o número de objetos do tipo que queríamos contar. Vejamos um exemplo dessa situação.

Exemplo 6. No que segue, chamamos de palavra qualquer sequência finita de letras, formadas usando nosso alfabeto de 26 letras. Assim, para ser considerada uma palavra, a sequência finita de letras não precisa fazer sentido, ou seja, não precisa ser encontrada num dicionário de Português. Por exemplo, “CASA”, “PERIPONGUE”, “TITANTNN” são palavras. Calcule o número de palavras com cinco letras, que possuem (pelo menos) duas letras consecutivas iguais.

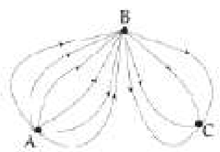
Solução. *Se tentarmos contar diretamente quantas palavras desse tipo existem, não é difícil perceber que o problema precisará ser dividido em muitos casos. Por exemplo, podemos considerar primeiro as palavras em que todas as letras são iguais, em seguida aquelas em que exatamente quatro letras consecutivas são iguais mas a quinta letra é diferente, e assim por diante. Essa análise seria extensa e tediosa. Como podemos, então, realizar a contagem? Ora, é bem mais simples contar o número de palavras com cinco letras que não possuem a propriedade desejada, ou seja, o número de palavras de cinco letras nas quais quaisquer duas letras consecutivas são distintas. De fato, escolhendo as letras uma a uma, temos que: há 26 possibilidades para a primeira letra e 25 possibilidades para cada uma das demais quatro letras (uma vez que cada uma precisa ser diferente apenas da letra anterior a ela). Sendo assim, há um total de* $\mathbf{26 \,.\, 25^4}$ *palavras de cinco letras que são ruins (por não satisfazerem a propriedade originalmente pedida). Por outro lado, o total de palavras com cinco letras (onde não impomos qualquer tipo de restrição) é, pelo Princípio Fundamental da Contagem, igual a* $\mathbf{26^5}$ *(pois há 26 possíveis escolhas para cada uma das cinco letras). Para terminar, basta ver que, se retirarmos do total de palavras com cinco letras as palavras que são ruins, o que sobrará serão as palavras que queremos contar. Assim, o número de palavras que possuem a propriedade pedida no enunciado ´e igual a* $\mathbf{26^5 - 26 \cdot 25^4 = 1.725.126}$.

Questões propostas

Q1. Existem cinco tipos diferentes de xícaras de chá e três tipos diferentes de pires na loja “A Festa do Chá”. De quantas maneiras você pode formar um conjunto de xícara com pires?

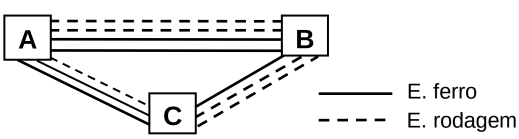
Q2. A loja “A Festa do Chá” também tem quatro tipos diferentes de colheres de chá. Quantos conjuntos diferentes podem ser comprados consistindo em uma xícara, um pires e uma colher de chá?

Q3. No País das Maravilhas existem três cidades **A**, **B** e **C**. Existem seis estradas ligando **A** a **B** e quatro estradas ligando B a C. De quantas maneiras é possível dirigir de **A** a **C**?



Q4. Vamos chamar um número natural de “todo-ímpar” se todos os seus algarismos forem ímpares. Quantos números todo-ímpares de quatro algarismos existem?

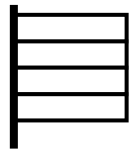
Q5. Três cidades **A**, **B** e **C** estão ligadas por estradas de rodagem e de ferro, conforme figura.



Por quantos caminhos diferentes uma pessoa pode

a) ir de A até C, passando por B?
b) ir de A até C, passando ou não por B?
c) ir direto de A até C, por estrada de ferro, e depois ir direto de C até B?
d) fazer o trajeto A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A?
e) ir direto de A até B por estrada de rodagem e, em seguida, voltar a A passando por C?
f) fazer o trajeto B $\rightarrow$ A $\rightarrow$ C $\rightarrow$ B, usando sempre o mesmo tipo de estrada?

Q6. Cada faixa da bandeira da figura deve ser pintada de uma cor, escolhida entre 5 disponíveis. De quantas formas isso pode ser feito, de maneira que



a) não haja cor repetida?
b) duas faixas vizinhas não sejam de mesma cor?
c) só a primeira e a últimas sejam da mesma cor?

Q7. Utilizando-se só os algarismos 1, 2, 4, 6 e 8, formam-se todos os números de 4 algarismos.

a) Qual é o total de números formados?
b) Quantos não têm algarismo repetido?
c) Quantos têm pelo menos um algarismo repetido?
d) Quantos são pares?
e) Quantos são maiores que 6 000 e não têm algarismo repetido?

Q8. No sistema de emplacamento de veículos, usam-se letras e algarismos. Um exemplo é a placa PMG-0358. As 3 letras são escolhidas entre as 26 do alfabeto; os algarismos são escolhidos entre os 10 disponíveis. Suponha que haja placas com quatro zeros (0000).

a) Quantas placas diferentes podem ser feitas?
b) Quantas têm as 3 letras e os 4 algarismos diferentes?
c) Quantas só têm vogais e algarismos maiores que 6?
d) Quantas têm 3 vogais diferentes e o primeiro e o último algarismo iguais?

Q9. Chama-se anagrama de uma palavra, toda “palavra” (com ou sem significado) obtida, trocando-se suas letras de posição. Veja, por exemplo, alguns anagramas da palavra AMOR:

AMOR, OMAR, MORA, MARO

Formam-se todos os anagramas de CARINHO.

a) Qual é o total de anagramas?
b) Quantos começam por vogal?
c) Quantos terminam em CA. nesta ordem?
d) Quantos têm o O e o A juntos. nesta ordem?

Q10. (Obmep–Q2N3–BQ–2013) Os ciclistas têm aversão ao número zero (porque é oval) e ao número oito (porque assim ficam as rodas após os acidentes). Quantos sócios podem se inscrever num clube de ciclistas se cada um deve possuir uma identificação de três dígitos, sem usar o dígito zero nem o dígito oito?

Q11. (Obmep–Q17N3–BQ–2014) Papai Noel chegou à casa de Arnaldo e Bernaldo carregando dez brinquedos distintos e enumerados de 1 a 10 e disse a eles: "o brinquedo número 1 é para você, Arnaldo e o brinquedo número 2 é para você, Bernaldo. Mas esse ano, vocês podem escolher ficar com mais brinquedos contanto que deixem ao menos um para mim". Diga de quantos modos Arnaldo e Bernaldo podem dividir entre eles o restante dos brinquedos.

Q12. (Obmep–Q3fase2N3-2012) Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura abaixo, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

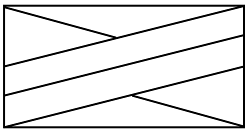
a) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de 3 x 2 x 2 maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?

b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?

c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?

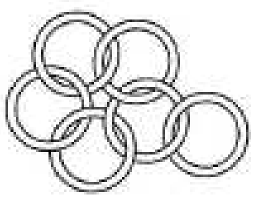
d) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

Q13. (Obmep–Q17fase1N3-2013) Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. De quantas maneiras ele pode pintar as regiões da bandeira da figura, cada uma com uma única cor, de modo que cada cor apareça pelo menos uma vez e que regiões adjacentes sejam pintadas com cores diferentes?



a) 336
b) 420
c) 576
d) 864
e) 972

Q14. (Obmep–Q18fase1N3-2016) O símbolo proposto para os Jogos Escolares de Quixajuba é formado por seis anéis entrelaçados como na figura. Cada um dos anéis deve ser pintado com uma das três cores da bandeira da cidade (azul, verde ou rosa), de modo que quaisquer dois anéis entrelaçados tenham cores diferentes. Quantas são as maneiras de pintar esse símbolo?



a) 24
b) 36
c) 48
d) 60
e) 72

Q15. Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. 3 bolas serão extraídas dessa urna sem reposição. Qual a quantidade de sequências de extrações possíveis?

Q16. Uma urna contém 100 bolas numeradas de 1 a 100. 5 bolas serão extraídas dessa urna com reposição de cada bola após a extração. Qual a quantidade de sequências de extrações possíveis?

Q17. (Obmep–Q19fase1N3-2016) Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

Q18. O alfabeto hermitiano consiste em apenas 3 letras: A, B e C. Uma palavra nesta linguagem é uma sequência arbitrária tendo, no máximo, quatro letras. Quantas palavras existem nesta linguagem?

Q19. Um time de futebol com 11 jogadores precisa eleger um capitão e um vice capitão. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Q20. Jogamos uma moeda três vezes. Quantas sequências diferentes de cara ou coroa podemos obter?

Q21. Cada célula de uma tabela 2 x 2 pode ser colorida branca ou preta. Quantas colorações diferentes existem para essa tabela?

Q22. Quantas maneiras existem de preencher um cartão da loteria esportiva? Nesta loteria você deve adivinhar os resultados de 13 jogos de futebol, indicando uma vitória para um dos dois times, ou um empate.

Q23. Quantos números de três algarismos podem ser escritos usando-se os algarismos 1, 2 e 3 (sem repetição) em alguma ordem?

Q24. De quantos modos podemos arrumar quatro bolas, de cores vermelha, preta, azul e verde, em uma fila?

NOS CINCO PROBLEMAS A SEGUIR CALCULAR O NÚMERO DE PALAVFRAS DIFERENTES QUE PODEM SER OBTIDAS REARRUMANDO-SE AS LETRAS DA PALAVRA DADA.

Q25. “VETOR”.

Q26. “CAMAS”.

Q27. “CARAVANA”.

Q28. “INTIMIDADE”.

Q29. “MATEMATICAMENTE”.