Ciclo 4 – Encontro 2

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Probabilidade Condicional

- Apostila 2: “Métodos de Contagem e Probabilidade”, de Paulo Cezar Pinto Carvalho.

  Capítulos 5:

  Probabilidade condicional.

Probabilidade Condicional

Veremos a seguir exemplos de situações em que a probabilidade de um evento é modificada pela informação de que um outro evento ocorreu, levando-nos a definir *probabilidades condicionais*.

Exemplo 1. Em uma urna há duas moedas aparentemente iguais. Uma delas é uma moeda comum, com uma cara e uma coroa. A outra, no entanto, é uma moeda falsa, com duas caras. Suponhamos que uma dessas moedas seja sorteada e lançada.

(a) Qual é a probabilidade de que a moeda lançada seja a comum?

(b) Qual é a probabilidade de que saia uma cara?

Probabilidade Condicional

(a) Qual é a probabilidade de que a moeda lançada seja a comum?

Solução: A resposta é $1/2$, já que ambas as moedas têm a mesma chance de serem sorteadas.

Probabilidade Condicional

(b) Qual é a probabilidade de que saia uma cara?

Solução: Há quatro possíveis resultados para o sorteio da moeda e o resultado do lançamento, todos com a mesma probabilidade:

- a moeda sorteada é a comum, e o resultado é cara;
- a moeda sorteada é a comum, e o resultado é coroa;
- a moeda sorteada é a falsa, e o resultado é cara;
- a moeda sorteada é a falsa, e o resultado também é cara, mas saindo a outra face.

Como em 3 dos 4 casos acima o resultado é cara, a probabilidade de sair cara é $\frac{3}{4}$.

Probabilidade Condicional

(c) Se o resultado do lançamento é cara, qual é a probabilidade de que a moeda sorteada tenha sido a comum?

Probabilidade Condicional

(c) Se o resultado do lançamento é cara, qual é a probabilidade de que a moeda sorteada tenha sido a comum?

Solução: No item (a) verificamos que a probabilidade de sair cara é $1/2$. Mas a situação é diferente agora: temos uma informação adicional, a de que, após o lançamento da moeda, o resultado foi cara. Com esta informação, podemos rever o cálculo da probabilidade da moeda honesta ter sido sorteada. Dos quatro resultados possíveis para o experimento, listados acima, o segundo deve ser excluído. Restam, assim, três possibilidades igualmente prováveis. Delas, apenas na primeira a moeda sorteada é a comum. Logo, com a informação de que o lançamento resultou em cara, a probabilidade de que a moeda sorteada tenha sido a comum se reduziu a $1/3$.

Probabilidade Condicional

A probabilidade que calculamos no exemplo anterior é uma *probabilidade condicional*. De um modo geral, a probabilidade condicional de um evento A, na certeza da ocorrência de um evento B (de probabilidade não nula) é denotada por $P(A|B)$ e definida como

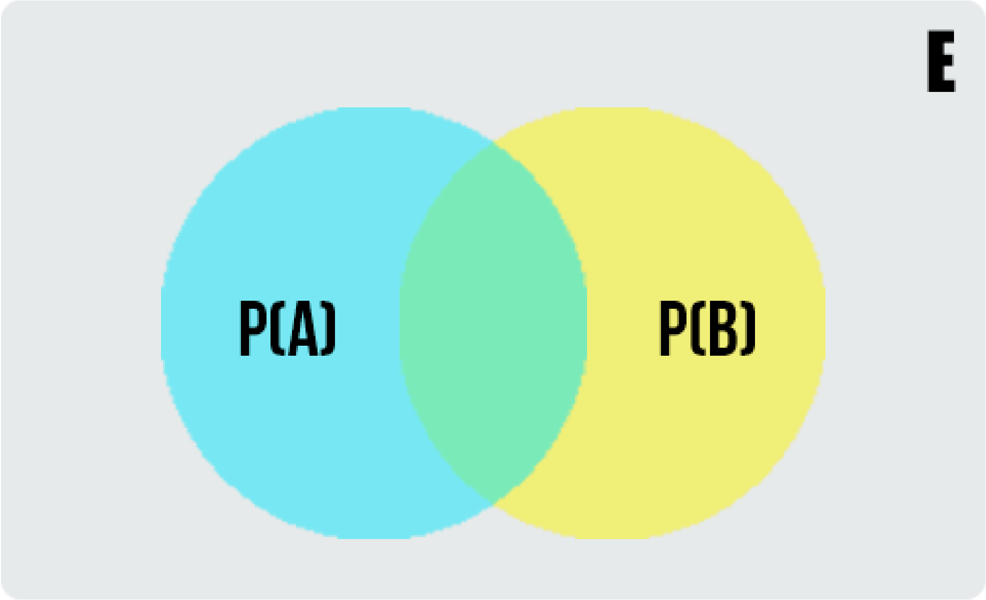
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

No caso do exemplo anterior, chamemos de A o evento "sortear a moeda comum", e de B o evento "obter resultado cara". O evento $A \cap B$ é "sortear a moeda comum e tirar cara". Temos:

$$P(A \cap B) = 1/4, P(B) = 3/4 \text{ e, assim, } P(A|B) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3},$$

como encontramos anteriormente.

Probabilidade Condicional



Em um espaço amostral, tendo acontecido o evento A, qual é a chance de que então aconteça o evento b?

Probabilidade Condicional

Exemplo 2. Uma carta é sorteada de um baralho comum, que possui 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) de cada naipe (ouros, copas, paus e espadas).

(a) Qual é a probabilidade de que a carta sorteada seja um A?

(b) Sabendo que a carta sorteada é de copas, qual é a probabilidade de que ela seja um A?

Probabilidade Condicional

(a) Qual é a probabilidade de que a carta sorteada seja um A?

Solução: Como o baralho tem $13 \times 4 = 52$ cartas e 4 delas são ases, a probabilidade de tirar um A é $\dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$.

Probabilidade Condicional

(b) Sabendo que a carta sorteada é de copas, qual é a probabilidade de que ela seja um A?

Solução: O fato de que a carta sorteada é de copas restringe os casos possíveis às 13 cartas de copas, das quais exatamente uma é A. Logo, a probabilidade de ser sorteado um A, dado que a carta sorteada é de copas, permanece igual a $\frac{1}{13}$. Mais formalmente, designando por A o evento "sortear A" e, por B, "sortear copas", o evento $A \cap B$ é "sortear o A de copas", e a probabilidade pedida é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/52}{13/52} = \frac{1}{13}.$$

Probabilidade Condicional

O exemplo acima ilustra uma situação importante: aquela na qual a probabilidade condicional de A na certeza de B é igual à probabilidade de A (ou seja a ocorrência de B não influi na probabilidade de ocorrência de A). Esta condição implica em $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B)$, ou seja, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Dizemos, então, que dois eventos A e B tais que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ são *independentes*.

Exercício 1

Joga-se um dado não viciado duas vezes. Qual é a probabilidade condicional de se obter 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados foi 7?

Exercício 1 - Solução

Solução:

Sejam A o evento "obteve-se 3 na primeira jogada" e B o evento "a soma dos resultados foi 7". Deseja-se calcular $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. Como $B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, então $P(B) = 6/6^2 = 1/6$. Como $A \cap B = \{(3,4)\}$, então $P(A \cap B) = 1/6^2 = 1/36$. Como $P(B) = 1/6$, $P(A \cap B) = 1/36$ e $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, então $P(A|B) = (1/36)/(1/6) = 1/6$.

Exercício 2

Um saco contém 3 moedas, duas normais e uma com duas caras. Uma moeda é retirada do saco ao acaso e lançada 4 vezes, em sequência. Se saíram 4 caras, qual a probabilidade de a moeda retirada ser a de duas caras?

Exercício 2 - Solução

Sejam A o evento "saem 4 caras" e B o evento "a moeda retirada tem duas caras". A probabilidade pedida é $P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$. Tem-se $P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)=1\cdot(1/3)=1/3$. Como $A=(A\cap B)\cup(A\cap \overline{B})$, sendo $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=\varphi$, então $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$. Tem-se $P(A\cap\overline{B})=P(A|\overline{B})\cdot P(\overline{B})=(1/16)\cdot(2/3)=1/24$. Como $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$, $P(A\cap B)=1/3$ e $P(A\cap\overline{B})=1/24$, então $P(A)=1/3+1/24=3/8$. Como $P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$, $P(A\cap B)=1/3$ e $P(A)=3/8$, então $P(B|A)=(1/3)/(3/8)=8/9$.

Exercício 3

Há duas urnas numeradas e cada uma tem duas gavetas. A urna 1 contém uma moeda de ouro em uma gaveta e uma de prata na outra e a urna 2 contém uma moeda de ouro em cada gaveta. Uma urna é escolhida aleatoriamente (sem que se mostre seu número) e uma de suas gavetas é aberta ao acaso. Sabendo que nessa gaveta há uma moeda de ouro, qual é a probabilidade de que a urna seja a de número 2?

Exercício 3 - Solução

Sejam A o evento "a moeda é de ouro" e B o evento "a urna é a de número 2". Então, deseja-se calcular $P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A)$. Tem-se $P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = 1 \cdot (1/2) = 1/2$. Como $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, sendo $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varphi$, então $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$. Tem-se $P(A \cap \overline{B}) = P(A \mid \overline{B}) \cdot P(\overline{B}) = (1/2) \cdot (1/2) = 1/4$. Como $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, $P(A \cap B) = 1/2$ e $P(A \cap \overline{B}) = 1/4$, então $P(A) = 1/2 + 1/4 = 3/4$. Como $P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A)$, $P(A \cap B) = 1/2$ e $P(A) = 3/4$, então $P(B \mid A) = (1/2)/(3/4) = 2/3$.

Exercício 4a

Uma questão de múltipla escolha tem 5 alternativas. Dos alunos de uma turma, 50% sabem resolver a questão, enquanto os demais "chutam" a resposta. Um aluno da turma é escolhido ao acaso.

(a) Qual é a probabilidade de que ele tenha acertado a questão?

Exercício 4a - Solução

Solução: Neste caso, vamos utilizar probabilidades condicionais conhecidas para calcular a probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente. Observe que, da expressão $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ decorre $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$. Se o aluno sabe resolver a questão, ele tem probabilidade 1 de acertá-la, enquanto, se ele não sabe, sua probabilidade de acerto é $1/5 = 0{,}2$. Portanto, $P(\text{acerta}|\text{sabe}) = 1$, enquanto $P(\text{acerta}|\text{não sabe}) = 0{,}2$. Podemos, então, obter as seguintes probabilidades:

$$P(\text{sabe e acerta}) = P(\text{sabe}) \cdot P(\text{acerta}|\text{sabe}) = (0{,}5) \cdot 1 = 0{,}5$$

$$\begin{aligned} P(\text{não sabe e acerta}) &= P(\text{não sabe}) \cdot P(\text{acerta}|\text{não sabe}) \\ &= 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P(\text{acerta}) &= P(\text{sabe e acerta}) + P(\text{não sabe e acerta}) \\ &= 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}6. \end{aligned}$$

Exercício 4b

(b) Dado que o aluno acertou a questão, qual é a probabilidade de que ele tenha "chutado"?

Exercício 4b - Solução

Solução: O que desejamos calcular é a probabilidade condicional de que o aluno não saiba resolver a questão, dado que ele a acertou. Temos:

$$P(\text{não sabe}|\text{acerta}) = \frac{P(\text{não sabe e acerta})}{P(\text{acerta})} = \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{1}{6}.$$

Exercício 5

Um juiz de futebol meio trapalhão tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma face vermelha. Depois de uma jogada violenta, o juiz mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um atleta. Se a face que o jogador vê é amarela, qual é a probabilidade da face voltada para o juiz ser vermelha?

Exercício 5 - Solução

$$P(\text{vê vermelha} \mid \text{mostra amarela}) =$$

$$= \frac{P(\text{vê vermelha e mostra amarela})}{P(\text{mostra amarela})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Exercício 6

Um exame de laboratório tem eficiência de 95% para detectar uma doença quando ela de fato existe. Além disso, o teste aponta um resultado falso positivo para 1% das pessoas sadias testadas. Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de que uma pessoa, escolhida ao acaso, tenha a doença, sabendo que o seu exame foi positivo?

Exercício 6 - Solução

$$P(\text{doente} \mid \text{positivo}) = \frac{P(\text{doente e positivo})}{P(\text{positivo})} =$$

$$= \frac{P(\text{doente}) \cdot P(\text{positivo} \mid \text{doente})}{P(\text{doente}) \cdot P(\text{positivo} \mid \text{doente}) + P(\text{sadio}) \cdot P(\text{positivo} \mid \text{sadio})} =$$

$$= \frac{0{,}005 \cdot 0{,}95}{0{,}005 \cdot 0{,}95 + 0{,}995 \cdot 0{,}01} = \frac{95}{294} \cong 0{,}3231$$

Estudar para o próximo encontro!

Próximo encontro: 15/10, sábado, às 08h30

Módulo: "Construções geométricas com régua e compasso"
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=67
Vídeoaulas:

- Aula 1 - Construções geométricas elementares 1
- Aula 2 - Construções geométricas elementares 2
- Aula 6 - Divisão de um segmento

Favor não esquecer régua e compasso no próximo encontro!