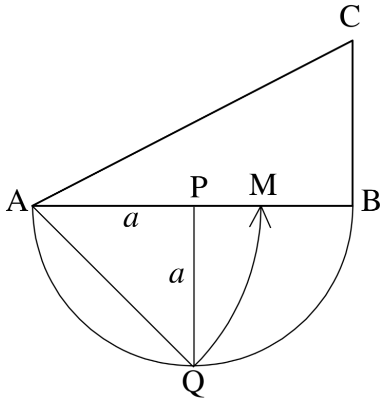
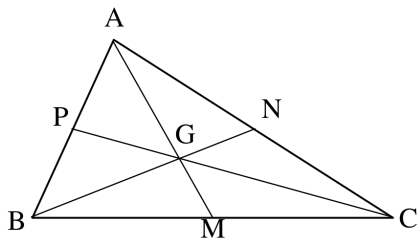


Como $AQ = a\sqrt{2}$, transfira com o compasso essa medida para a reta AB, encontrando a posição exata de M.

Exercício 4

As medianas de um triângulo dividem esse triângulo em 6 outros triângulos. Mostre que todos têm mesma área.

Solução: Representemos por (ABC) a área de um triângulo ABC.



Seja $(ABC) = S$. O ponto de interseção das medianas é G, o baricentro. Sabemos que $BG = 2/3 \cdot BN$. Logo,

$$(ABC) = \frac{2}{3}(ABN) = \frac{2}{3} \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{3}.$$

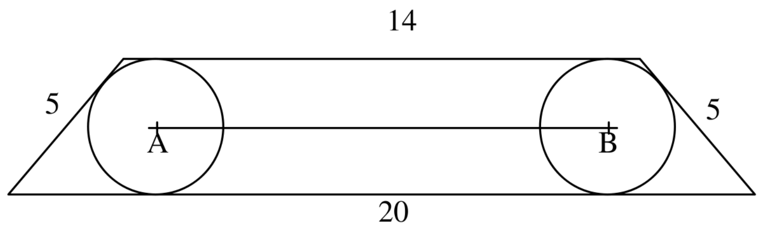
Analogamente, $(BCG) = (CAG) = S/3$. Mas GP é mediana no triângulo ABG. Daí, $(APG) = (BPG) = S/6$. Assim, os seis triângulos têm área $S/6$.

Usando Áreas

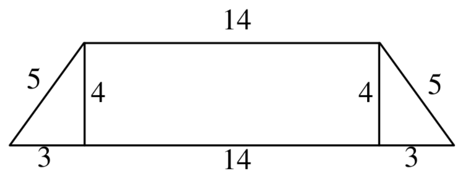
O estudante pensa, em geral, que um problema sobre áreas significa sempre calcular a área de alguma figura. Na verdade não é só isso. A ferramenta "área" pode ser usada na solução de diversos problemas de geometria plana de aparência algo complicada. Veja um exemplo.

Exercício 5

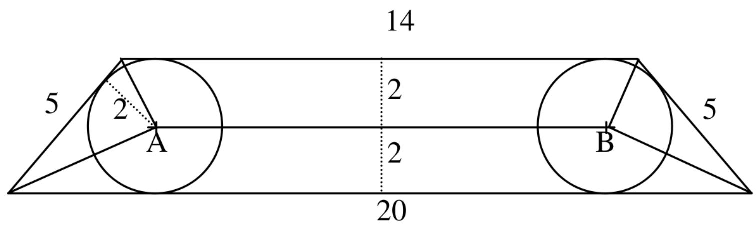
A figura a seguir mostra um trapézio com bases medindo 20 cm e 14 cm e com os outros dois lados medindo 5 cm cada um. Duas circunferências com centros A e B são tangentes às bases, uma ao lado esquerdo e outra ao lado direito. Pergunta-se qual é o comprimento do segmento AB.



Solução: Vamos inicialmente calcular a altura do trapézio, que é o diâmetro de cada circunferência. Dividindo o trapézio em um retângulo e dois triângulos retângulos iguais, temos a evidente situação seguinte:



A altura do trapézio mede 4 cm e o raio de cada circunferência mede 2 cm. Vamos agora ligar os dois vértices da esquerda ao ponto A e os dois vértices da direita ao ponto B. Vemos agora o trapézio original dividido em dois outros trapézios e dois triângulos iguais.



Lembrando que a área do trapézio é o produto da base média pela altura e observando que os dois triângulos de vértices A e B têm base igual a 5 e altura igual a 2, vamos escrever a equação que diz que a soma das áreas dessas quatro figuras é igual à área do trapézio original. Fazendo $AB = x$, temos:

$$\frac{(20+x)\cdot 2}{2} + \frac{(14+x)\cdot 2}{2} + 2\cdot\frac{5\cdot 2}{2} = \frac{(20+14)\cdot 4}{2}.$$

Isto dá $x = 12$, resolvendo nosso problema.

É claro que outra forma de resolver pode ser conseguida com outros meios. O que desejamos enfatizar é que a ferramenta "área" muitas vezes é útil para resolver problemas diversos. Nesse caso, ela propiciou uma solução limpa e elegante.

2.2 Número π

O número π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Esta razão dá sempre o mesmo valor, ou seja, independe da circunferência, porque duas circunferências quaisquer são semelhantes. Todas as circunferências são semelhantes entre si. Se C é o comprimento da circunferência de raio R, então por definição:

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Mas, o que é o comprimento de uma circunferência? Nós sabemos o que é o comprimento de um segmento, mas temos apenas uma ideia intuitiva do que seja o comprimento de uma circunferência. Podemos pensar em passar um barbante bem fino em volta da circunferência, esticá-lo e medir seu comprimento com uma régua. Isto dá uma boa ideia do que seja o comprimento da circunferência, mas este método experimental permite apenas avaliar (com pouca precisão) essa medida. Vamos tornar mais preciso este conceito.

O comprimento da circunferência é, por definição, o número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos regu-