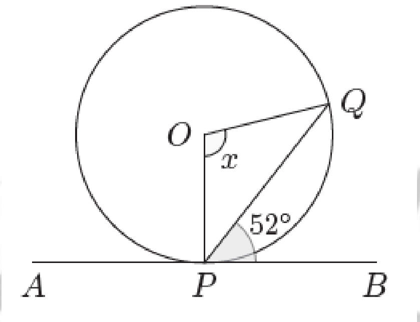
Lista de Exercícios – Nível 3 – Ciclo 3 – Marcos Assumpção - CEPAC

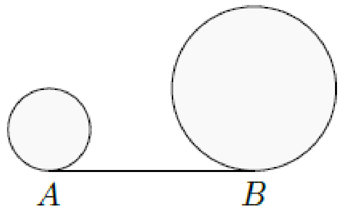
Encontro 2:

1) Na figura a seguir a reta AB é tangente à circunferência de centro O no ponto P.



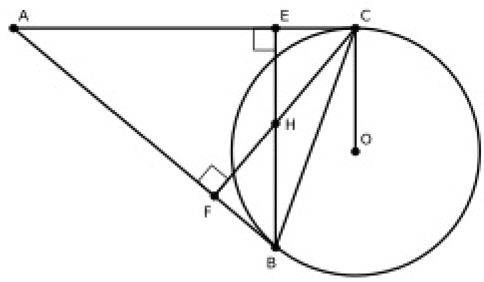
Se Q é um ponto da circunferência tal que QPB = 52°, determine a medida do ângulo x= POQ.

2) Na figura a seguir, AB é um segmento tangente às circunferências de raios 2 cm e 5 cm.



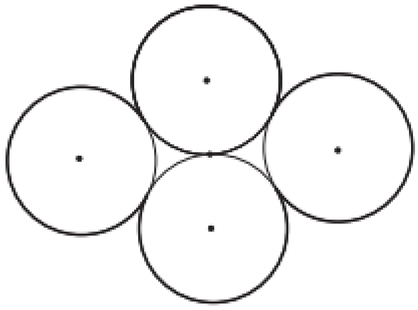
Se o comprimento do segmento AB é igual a 10 cm, determine a distância entre os centros das circunferências.

3) (Banco de Questões 2016, N2Q4) Duas tangentes são desenhadas de um ponto A a um círculo de centro O, tocando-o em B e C.



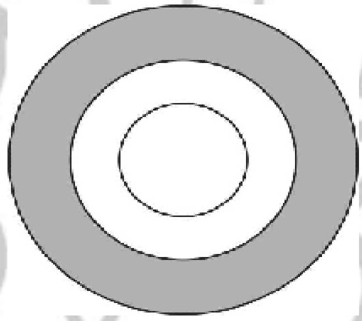
Seja H o ortocentro do triângulo ABC, sabendo que o ângulo $B\widehat{A}C = 40°$, encontre o valor do ângulo $\widehat{HCO}$.

4) (Banco de Questões 2010, N2Q215) A figura a seguir é formada por quatro círculos tangentes de raio a.



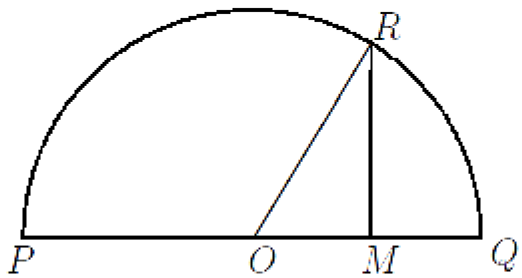
Determine o comprimento do contorno externo, que está com o traçado destacado.

5) (Banco de Questões 2010, N3Q72) Na figura, os três círculos são concêntricos, e a área do menor círculo coincide com a área do maior anel, destacado em cinza. O raio do menor círculo é 5 cm e do maior 13 cm.



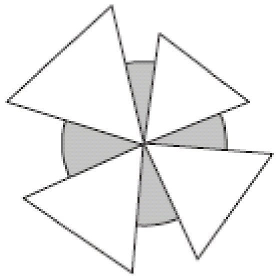
Qual é o raio (em cm) do círculo intermediário?

6) (Banco de Questões 2008, N2L5Q2)Na figura, O é o centro do semi círculo de diâmetro PQ, e RM é perpendicular a PQ.



Se o arco $\widehat{PR}$ é o dobro do arco $\widehat{RQ}$ qual é a razão entre PM e MQ?

7) (OBMEP 2006, N3F1Q8)A figura mostra um círculo de área 36 cm^2 sobre o qual estão desenhados quatro triângulos equiláteros com um vértice comum no centro do círculo.



Qual é a área da região sombreada?

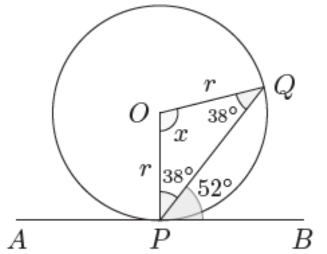
8) (OBMEP 2006, N3F1Q12)Na figura os quatro círculos são tangentes e seus centros são vértices de um quadrado de lado 4 cm.

Qual é o comprimento, em centímetros, da linha destacada?

Soluções:

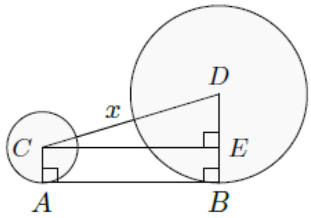
1)

Solução. A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que termina no ponto de tangência. Isto significa que as retas OP e AB são perpendiculares, ou seja, $O\hat{P}B = 90°$. Assim os ângulos $O\hat{P}Q$ e $Q\hat{P}B$ são complementares e, portanto, $O\hat{P}Q = 90° - 52° = 38°$. Agora observe que o triângulo OPQ é isósceles, pois possui dois lados iguais ao raio da circunferência. Daí $O\hat{Q}P = O\hat{P}Q = 38°$. Como a soma dos ângulos internos do triângulo OPQ é igual a 180°, vemos que $x = 180° - 38° - 38° = 104°$.



2)

Solução. Sejam C e D os centros das circunferências. Desenhe os segmentos CA e DB e desenhe o segmento CE paralelo a AB, como na figura a seguir.

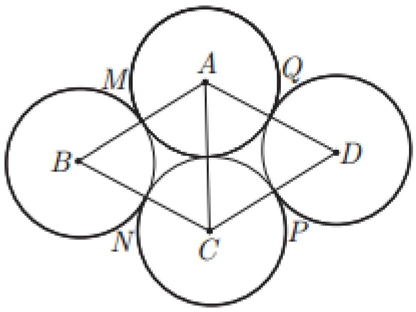


Nesta figura temos que $\overline{CA} = 2\ cm$ e $\overline{DB} = 5$ cm, pois estes dois segmentos são raios das circunferências. Além disso, $\overline{CE} = \overline{AB} = 10$ cm e $\overline{EB} = \overline{CA} = 2$ cm, pois $ABEC$ é um retângulo. Daí $\overline{DE} = \overline{DB} - \overline{EB} = 5 - 2 = 3$ cm. Se $x = \overline{CD}$, pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo CDE, obtemos

$$x^2 = 10^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 109 \Rightarrow x = \sqrt{109} \text{ cm}.$$

3) Como AC é tangente ao círculo, temos $\widehat{ACO} = 90°$.
Assim, $\widehat{HCO} = 90° - \widehat{ACF} = \widehat{CAF} = 40°$.

4) Sejam A, B, C e D os centros dos quatro círculos e M, N, P e Q os pontos de tangência entre esses círculos, conforme figura.



Observe que $AD = DC = CB = BA = AC = 2a$. Logo, os triângulos ABC e ACD são equiláteros e, por isso, seus ângulos internos são iguais a 60°. Portanto, $\widehat{ABC}$ = 60º = $\frac{1}{6}$ 360° e $\widehat{DAB}$ = 120° = $\frac{1}{3}$ 360°, o que acarreta que os arcos dos contornos internos a esses dois ângulos medem

$$\widehat{NM} = \frac{1}{6} \times 2\pi a \quad \text{e} \quad \widehat{MQ} = \frac{1}{3} \times 2\pi a$$

e os contornos externos por B e A, de traçado destacado, medem $\frac{5}{6} \times 2\pi a$ e $\frac{2}{3} \times 2\pi a$, respectivamente. Por simetria, segue que o contorno externo da figura dada tem comprimento igual a

$$(2 \times \frac{5}{6} + 2 \times \frac{2}{3})2\pi a = 6\pi a.$$

5) A área do maior círculo é $13^2\,\pi = 169\,\pi$ e a do menor é $5^2\,\pi = 25\,\pi$, que também é a área do maior anel. Seja r o raio do círculo intermediário. Então, a área do maior anel é $169\,\pi - \pi\,r^2$. Logo, $169\,\pi - \pi\,r^2 = 25\,\pi$, ou seja, $\pi r^2 = 169\,\pi - 25\,\pi = 144\,\pi$, donde $r^2 = 144$ e r = 12 cm.

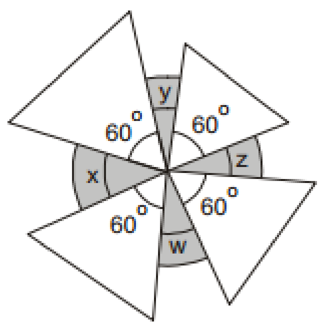
6) Se o arco $\widehat{PR}$ é o dobro do arco $\widehat{RQ}$, vale a mesma relação entre os ângulos centrais, logo: $\widehat{POR} = 2\,\widehat{ROQ}$. Como

$$\widehat{POR} + \widehat{ROQ} = 180°,$$

segue-se que $3\,\widehat{ROQ} = 180°$, donde $\widehat{ROQ} = 60°$. Mas, $OR = OQ = r$ raio do círculo. Daí concluímos que o triângulo ORQ é equilátero. Portanto, a altura RM também é mediana, ou seja: $OM = MQ$. Logo, se r é o raio do círculo temos:

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{PO+OM}{\frac{OQ}{2}} = \frac{r+\frac{r}{2}}{\frac{r}{2}} = 3$$

7) Como os quatro triângulos são equiláteros, cada um de seus ângulos mede 60°. Logo a soma dos ângulos x, y, z e w na figura é $x + y + z + w = 360° - 4 \times 60° = 120°$.



Como $360° \div 120° = 3$ a área cinza representa $\frac{1}{3}$ da área do círculo, ou seja, ela mede $36 \div 3 = 12\text{cm}^2$.

8) A linha é composta de dois arcos de $\frac{\pi}{2}$ radianos e dois arcos de $\frac{3\pi}{2}$ radianos. Como o raio das circunferências é 2 cm , segue que o comprimento da linha é $(2\times\frac{\pi}{2} + 2\times\frac{3\pi}{2})\times 2 = 8\pi$ cm.