

(Questão 1)(JOGO DAS FACES) Para iniciar o estudo de paridade, vamos fazer uma adivinhação e imaginar um personagem fictício que chamaremos de “o mestre”:

- Sobre uma mesa coloque 5 moedas: três com a coroa para cima e duas com a cara para cima (veremos logo a seguir que estes números podem ser trocados por quaisquer outros).
- O mestre vira de costas para as moedas e pede para os alunos virarem uma moeda qualquer.
- Em seguida, ele pede para os alunos virarem novamente uma moeda qualquer (que pode inclusive ser a mesma que tinha sido virada anteriormente).
- E o mestre continua pedindo que os alunos virem uma moeda qualquer por vez, totalizando 6 viradas ao todo (veremos que este número também poderá ser substituído por um outro qualquer).
- Após 6 viradas, o mestre solicita que os alunos escondam uma moeda, observando antes (os alunos) a sua face superior.
- Escondida a moeda, o mestre observa, então, as 4 moedas que ficaram sobre a mesa e adivinha a face superior da moeda escondida.

Pergunta-se: Como o mestre consegue adivinhar a face superior da moeda escondida?

Solução: No início do jogo, temos 3 coroas e 2 caras, ou seja, temos um número ímpar de coroas e um número par de caras. Após uma moeda ser virada, podemos ter 4 coroas e 1 cara, ou então, 2 coroas e 3 caras. Observe que independente da moeda que foi virada passamos a ter uma quantidade par de coroas e uma quantidade ímpar de caras. Continuando este raciocínio vemos que após ser executada uma virada de moeda, a paridade do número de caras e a paridade do número de coroas muda (de par para ímpar ou de ímpar para par). E isto acontece em cada virada. Veja na tabela ao lado:

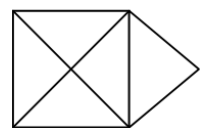
	COROAS	CARAS
início	ímpar	par
após a 1ª virada	par	ímpar
após a 2ª virada	ímpar	par
após a 3ª virada	par	ímpar
após a 4ª virada	ímpar	par
após a 5ª virada	par	ímpar
após a 6ª virada	ímpar	par

Observe que após 6 viradas estaremos como na posição inicial: uma quantidade ímpar de coroas e uma quantidade par de caras. Quando os alunos escondem uma moeda, seja ela cara ou coroa, a paridade do mesmo tipo de moeda escondida muda em relação a situação inicial. Deste modo:

I- Se os alunos esconderam uma coroa, a quantidade de coroas existentes nas 4 moedas que sobraram na mesa é par.

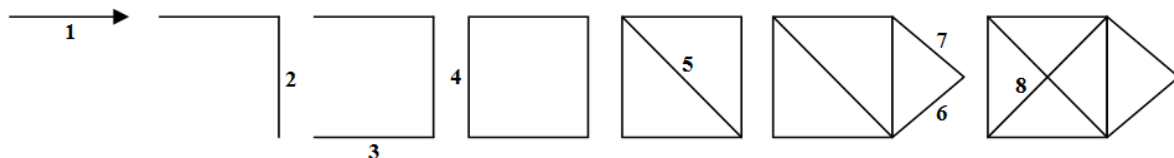
II- Se os alunos esconderam uma cara, a quantidade de caras deve ser ímpar.

(Questão 2) Na escola da Jéssica, Mônica e Ana surgiu uma brincadeira: fazer desenhos sem tirar o lápis do papel. Como este ao lado, por exemplo:



As regras da brincadeira eram simples. Primeira regra: é proibido tirar o lápis do papel. Segunda regra: é proibido passar duas vezes pela mesma linha (mas vale cruzar as linhas).

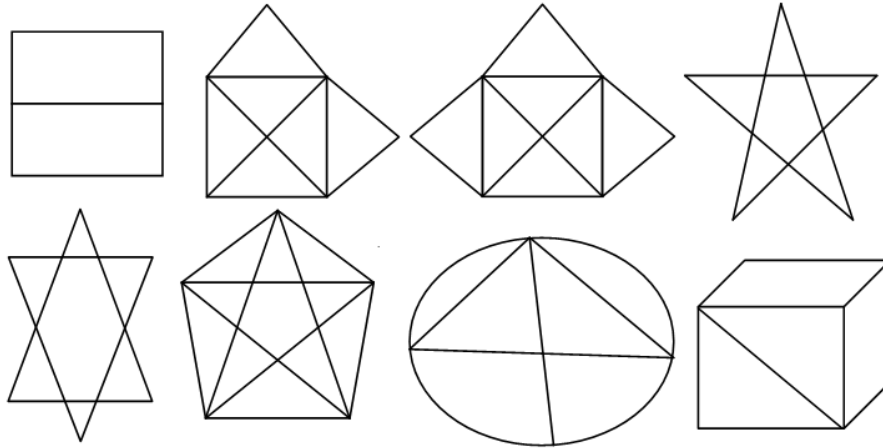
O desenho anterior pode ser feito assim:



Para indicar toda essa sequência, numeramos os traços no próprio desenho. Você pode fazer toda numeração numa figura só.

Vamos experimentar...

Desenhe essas figuras sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pela mesma linha. Não se esqueça de numerar os traços para mostrar a ordem em que eles foram desenhados.

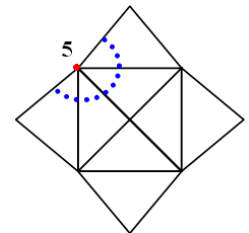
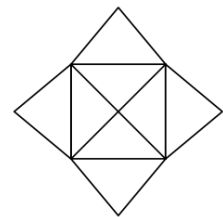


Existe alguma dessas figuras que não tenha conseguido fazer? **Não**
Um desenho que ninguém conseguia fazer

A brincadeira de desenhar sem tirar o lápis do papel vinha ganhando adeptos na escola das nossas queridas alunas. Quando apareceu um desenho que ninguém conseguia fazer, aí então virou uma mania, uma verdadeira obsessão. Nas aulas, nos intervalos, no caminho da escola para casa, em todos os cantos da escola viam-se alunos tentando fazer esta simples figura, nas regras já conhecidas:

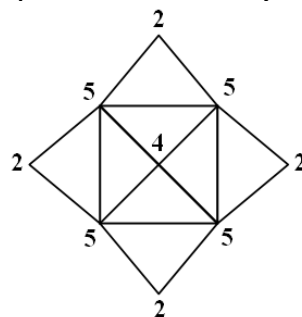
E você não quer tentar?

Disseram que o Junior, o melhor aluno da 8º ano C, tinha feito logo na primeira, mas que não conseguia fazer de novo. Isso só serviu para atíçar mais ainda a garotada. O fato é que, apesar das tentativas, ninguém, mas ninguém mesmo conseguia fazê-la. O tempo passou e a questão já estava quase esquecida quando num determinado dia, Ana tocou no assunto. Wallisom que era o menino mais quietinho da 8º ano D e que tinha acompanhado toda aquela onda, foi a lousa, fez o desenho ao lado e comentou:



O número 5 que eu coloquei ao lado do ponto indica que dele saem 5 linhas. São as 5 que estão marcadas com um tracejado. E prosseguiu:

Vamos fazer essa contagem em todos os pontos onde os traços se encontram. Vejam:



E continuou:

- Observem que temos quatro números ímpares. Agora, atenção: sempre que fizermos isso numa figura, se aparecerem mais de dois números ímpares, será impossível desenhar a figura sem tirar o lápis do papel. Os determinados estudantes se entreolharam. Impossível? Teriam escutado bem?

Impossível? – perguntou Jéssica.

É – disse Wallisom.

Não é a toa que ninguém na escola fez ... – disse Mônica.

E o Junior, hein? Conseguiu o impossível logo de cara ... – comentou Jéssica.
 Todos riram, já pensando nas gozações que fariam com Junior.
 Quando mesmo que é impossível ? perguntou Ana.
 Quando aparecem mais de dois números ímpares, como nesta figura – respondeu Wallisom, apontando para o número 5.
 Por que, quando aparecem mais de dois números ímpares, é impossível desenhar a figura? – perguntou Mônica.
 É essa pergunta que deixo para vocês me responderem.

Pensando...

a) Wallisom está certo em suas afirmações?

Solução: Sim. A afirmação “... sempre que fizermos isso numa figura, se aparecerem mais de dois números ímpares, será impossível desenhar a figura sem tirar o lápis do papel”, está certa.

b) Se Wallisom está certo (~~ou errado!~~), formule uma explicação que garanta quando é possível realizar o desenho ou não.

Solução: Vamos fazer, ao lado (Fig.1), uma figura sem tirar o lápis do papel. Meu desenho vai passar por muitos pontos entre os quais os pontos A, B e C. Enquanto desenho, vamos também contar quantas linhas já passaram pelos pontos A, B e C.

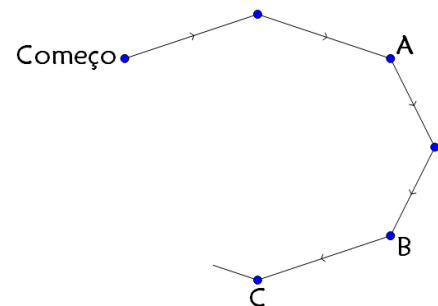


Fig. 1

Continuando o desenho ...

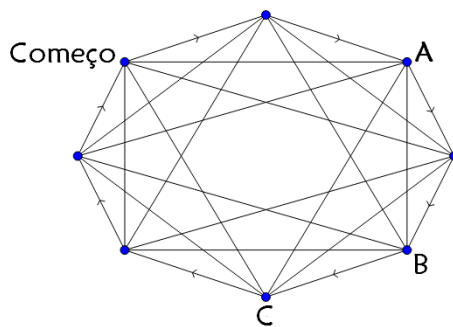


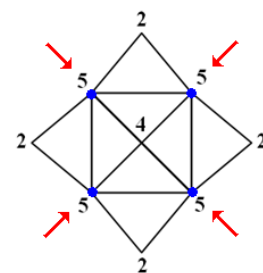
Fig. 2

Contou?

Ao desenhar sem tirar o lápis do papel vou chegar ao ponto **A**. Para prosseguir, precisamos sair desse mesmo ponto. Serão então duas linhas passando por **A** (uma chegando e outra saindo). Continuando o desenho(Fig.2), passando por outros pontos da figura, quando retornar ao ponto **A**, terei traçado a terceira linha que passa por **A**. Mas saindo de **A** para continuar o desenho, terei a quarta linha. Dessa forma de duas em duas, o número das linhas que passam por **A** será par, sempre que o ponto de saída e de chegada forem os mesmos. Exceto em dois casos possíveis:

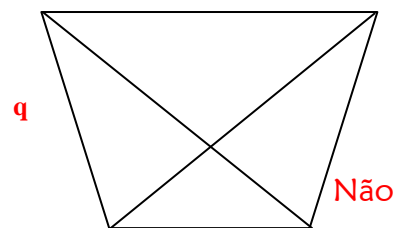
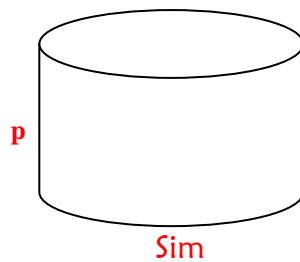
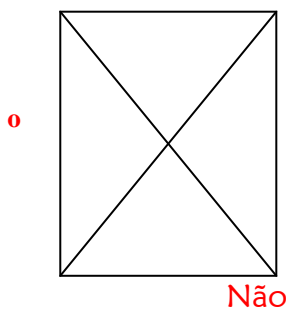
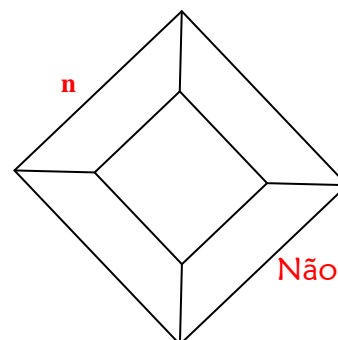
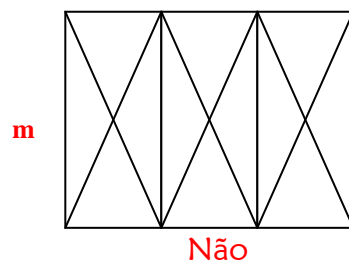
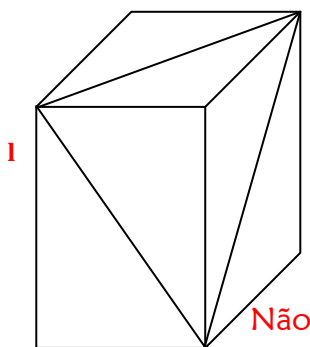
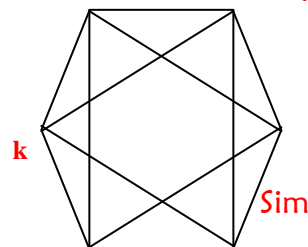
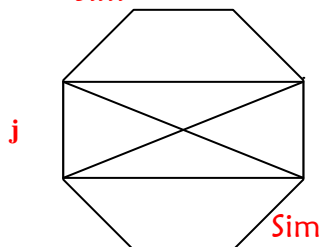
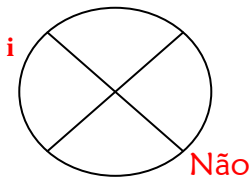
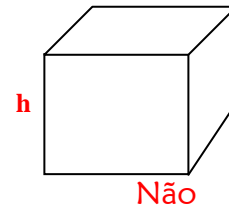
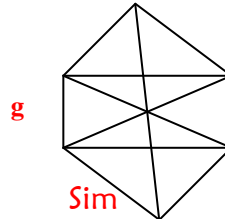
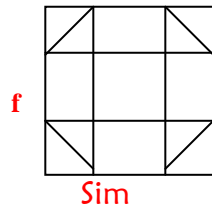
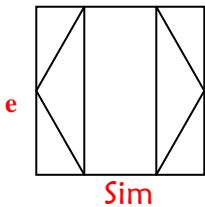
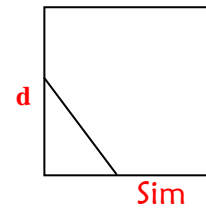
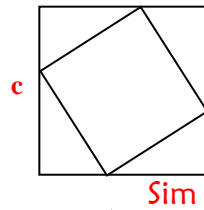
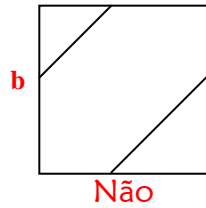
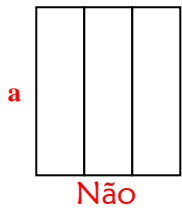
- O ponto onde se começa o desenho não é o mesmo em que se termina, e;
- O ponto onde se termina o desenho não é o que começamos.

Cada uma dessas duas exceções(na verdade, é uma só), considerando as regras do problema e portanto a figura feita, dá origem a dois pontos no máximo numa mesma figura com números ímpares. Isso quer dizer que se a figura tiver mais de dois pontos com números ímpares, não foi desenhada conforme as regras do problema. É o caso da figura dada como exemplo pelo Wallisom onde aparecem quatro números ímpares.



Essa figura não pode ser desenhada conforme as regras do problema.

c) Entre as figuras a seguir, quais podem ser desenhadas sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pela mesma linha? (Não tente desenhar a figura, apenas analise e diga sim ou não)



Adaptado de: "Vivendo a matemática – par ou ímpar"
José Jakubovic - página 29-33
ed Scipione

(Questão 3) Você pode encontrar sete números ímpares cuja soma seja 100?

Solução: Não. Vamos imaginar os lugares desses supostos números ímpares:

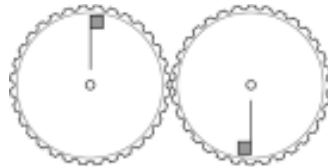
$$\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square = 100$$

A soma de dois números ímpares, quaisquer que sejam, é par e a soma de um número par com um ímpar (visto que o total de parcelas é ímpar) é ímpar. Como o resultado que se pretende é par (100), o problema não possui solução.

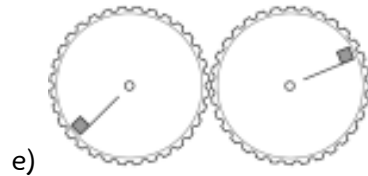
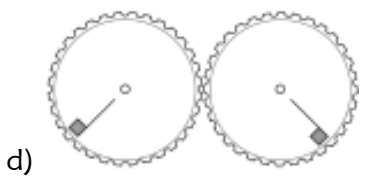
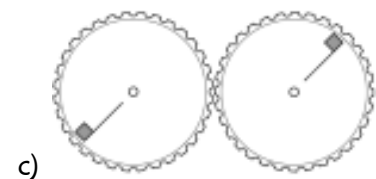
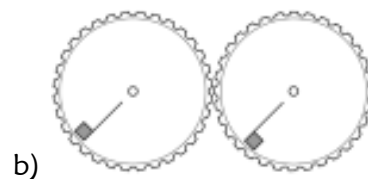
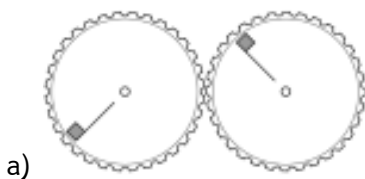
(Questão 4) É possível trocar uma nota de 25 rublos em dez notas com valores 1, 3 ou 5 rublos?

Solução: Não é possível. Esta conclusão baseia-se em uma observação simples: a soma de um número par (no caso dez) de números ímpares é par e a soma de um número ímpar de números ímpares é ímpar. Portanto dez notas de valores ímpares só podem resultar numa soma com valor par e não em 25.

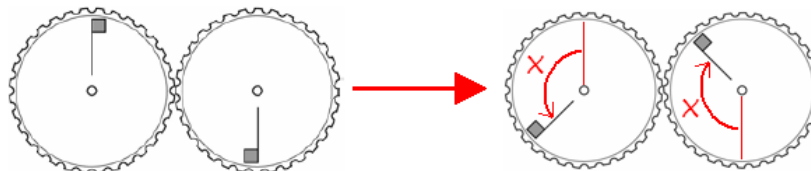
(Questão 5) Juliano encaixou duas rodas dentadas iguais, cada uma com uma bandeirinha igual desenhada, como mostra a figura abaixo.



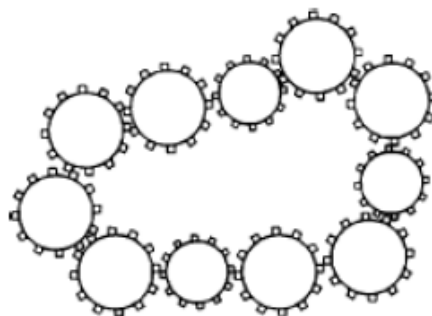
Então ele girou a roda da esquerda um pouco. Qual das alternativas abaixo pode representar a posição final das rodas?



Solução: Os dois discos giram em sentidos opostos; quando um gira no sentido horário, o outro gira no sentido contrário, ou seja, anti-horário. Considerando que a engrenagem da esquerda girou um ângulo x em um sentido, a engrenagem da direita girou o mesmo ângulo x no sentido contrário, e portanto a bandeirinha ficou na posição mostrada na alternativa (a) conforme ilustração a seguir.



(Questão 6) Onze engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em uma cadeia como está ilustrado na figura a seguir. Todas as engrenagens podem rodar simultaneamente?

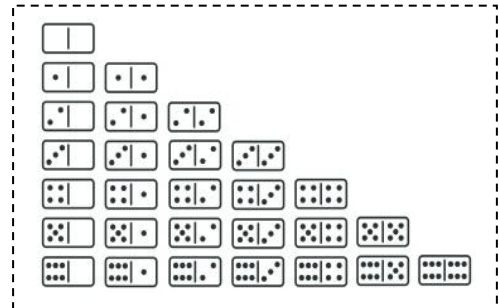


Solução: A resposta é não. Suponha que a primeira engrenagem gira no sentido horário. Então a segunda tem que girar no sentido contrário, anti-horário, a terceira no sentido horário novamente, a quarta no sentido anti-horário. E assim por diante. É claro que as engrenagens “ímpares” têm que girar no sentido horário, enquanto as “pares” têm que girar no sentido anti-horário. Mas então, a primeira e a décima primeira engrenagens têm que girar no mesmo sentido. Isto é uma contradição.

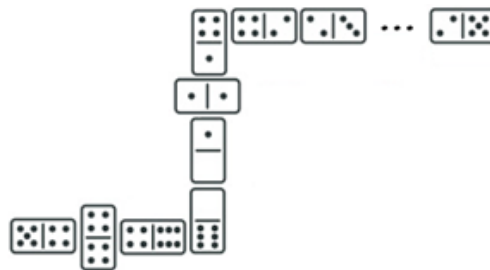
(Questão 7) Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de “+” ou de “-” entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

Solução: Não é possível. Imaginando que fosse possível, poderíamos separar os números dados em dois grupos com a mesma soma (basta passar todos os números com sinal negativo para o outro lado da expressão que é igual a zero). Entretanto a soma dos números naturais de 1 a 10 é igual a 55. Como este número é ímpar, não podemos separar os números dados em dois grupos que tenham a mesma soma.

(Questão 8) Todas as peças de um dominó foram colocadas em uma cadeia de modo que o número de bolinhas nas extremidades de dois dominós adjacentes são iguais. Se uma das extremidades da cadeia contém 5 bolinhas, qual é o número de bolinhas na outra extremidade?



Solução: No meio da cadeia de dominós, cada número de bolinhas ocorre em pares (nas extremidades adjacentes). Como existem oito extremidades com cinco bolinhas no conjunto de dominós, o último quadrado também tem que ter cinco bolinhas.



(Questão 9) Um número foi obtido permutando-se os algarismos de outro número.

a) A soma desses dois números pode ser igual a 9999?

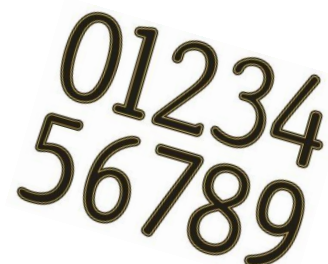
Solução: Sim, pode. Por exemplo $5544 + 4455 = 9999$

b) Essa soma poderia ser igual a 99999?

Solução: Não, não pode. Vamos supor o contrário. Como o número de algarismos nos dois números é idêntico, ambos têm que conter cinco algarismos, ou a soma seria menor ou maior do que 99999. Além disso, ao somar esses números, não pode ocorrer o “vai um”. De fato, a soma de dois algarismos quaisquer não pode ser maior do que 18, de modo que, ao somarmos os últimos algarismos dos dois números, obteremos exatamente 9, sem “vai um”. Analogamente, ao somar os penúltimos algarismos, obteremos exatamente 9, e assim por diante. Mas então podemos formar pares com os algarismos dos nossos números de modo que cada par tenha soma igual a 9. Como um dos números foi formado permutando-se os algarismos do outro, os algarismos do número original podem ser divididos em pares cuja soma é 9. Mas isso é impossível, já que o número tem cinco algarismos e nenhum algarismo pode formar um par consigo mesmo, pois a soma de qualquer algarismo consigo mesmo é um número par e 9 é ímpar.

(Questão 10) Escrevendo o algarismo 7 a esquerda de um número natural de dois algarismos, obtemos um número novo. Escrevendo o algarismo 7 à direita, obtemos um outro número novo. A diferença entre os números obtidos é 216. Qual é o número de dois algarismos?

- a) 28
- b) 82
- c) 35
- d) 53
- e) 78



Solução: Alternativa (d). Veja: Se representarmos o número de 2 algarismos assim “ ab ”. Logo: $7ab - ab7 = 216$. Como em “ $7ab$ ”, o 7 está na posição das centenas, “ a ” está na posição das dezenas e o “ b ” está na posição das unidades, então: $7ab = 700 + 10a + b$ e de forma análoga $ab7 = 100a + 10b + 7$. Assim:

$$\begin{aligned}
 7ab - ab7 = 216 &\Rightarrow (700 + 10a + b) - (100a + 10b + 7) = 216 \\
 &\Rightarrow -90a - 9b + 693 = 216 \\
 &\Rightarrow -90a - 9b = 216 - 693 \\
 &\Rightarrow -9 \cdot (10a + b) = -477 \\
 &\Rightarrow (10a + b) = -477 \div (-9) \\
 &\Rightarrow 10a + b = 53 \\
 &\Rightarrow ab = 53 \qquad \text{Portanto o número de 2 algarismos é 53 pois } 753 - 537 = 216
 \end{aligned}$$

(Questão 11) Em um quartel existem 100 soldados e, todas as noites, três deles são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que após certo tempo um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez.

Solução: Não. Escolha um soldado. Em cada noite em que trabalha, ele está em companhia de dois outros. Como 99 é um número ímpar, não podemos formar pares de soldados sempre diferentes para trabalhar com o escolhido.

(Questão 12) Numa cidade há apenas pessoas honestas ou mentirosos. Cada frase dita por uma pessoa honesta é verdadeira, e cada frase pronunciada por uma pessoa mentirosa é falsa. Certo dia, algumas pessoas se encontraram numa sala e três delas fizeram as seguintes afirmações.

- I) A primeiro disse: “Não há mais do que três pessoas na sala. Todos nós somos mentirosos”.
- II) A segunda disse: “Não há mais do que quatro cidadãos na sala. Nem todos nós somos mentirosos”.
- III) A terceira disse: “Há cinco cidadãos na sala. Três de nós são mentirosos”.

Quantas pessoas estavam na sala e quantas delas são mentirosas?

- a) 3 pessoas, 1 delas é mentirosa
- b) 4 pessoas, 2 delas são mentirosas
- c) 5 pessoas, 3 delas são mentirosas
- d) 4 pessoas, 1 delas é mentirosa
- e) 5 pessoas, 2 delas são mentirosas

Solução: A primeira pessoa é mentirosa ou fala a verdade. Se for verdade o que ela diz, ou seja, que todos são mentirosos, então ela é mentirosa, uma contradição. Portanto, a primeira pessoa é mentirosa e isso nos leva a concluir que há mais de 3 pessoas na sala e que pelo menos uma não mente.

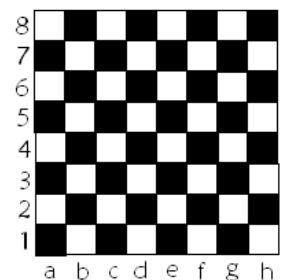
A segunda pessoa é mentirosa ou fala a verdade. Se for mentira o que diz, então não é verdade que alguns não são mentirosos, ou seja, todos são mentirosos, o que não está de acordo com a afirmação inicial e a conclusão anterior. Portanto, a segunda pessoa diz a verdade e daí concluímos que há 4 pessoas ou menos na sala.

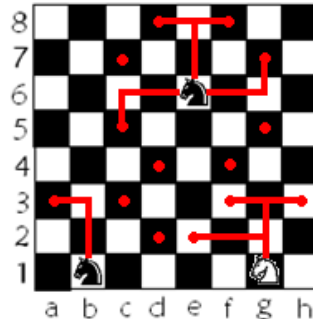
A terceira pessoa é mentirosa ou fala a verdade. Ela não pode estar dizendo a verdade, porque não pode haver 5 pessoas na sala, de acordo com a conclusão anterior. Portanto, ela é mentirosa.

Logo, não há 3 pessoas mentirosas na sala. Conclusão: há 4 pessoas na sala e 2 são mentirosas. Alternativa b)

(Questão 13) Em um tabuleiro de xadrez, um cavalo sai do quadrado a1 e retorna para a mesma posição depois de vários movimentos. Mostre que não é possível fazer um número ímpar de movimentos para o cavalo retornar a sua posição original.

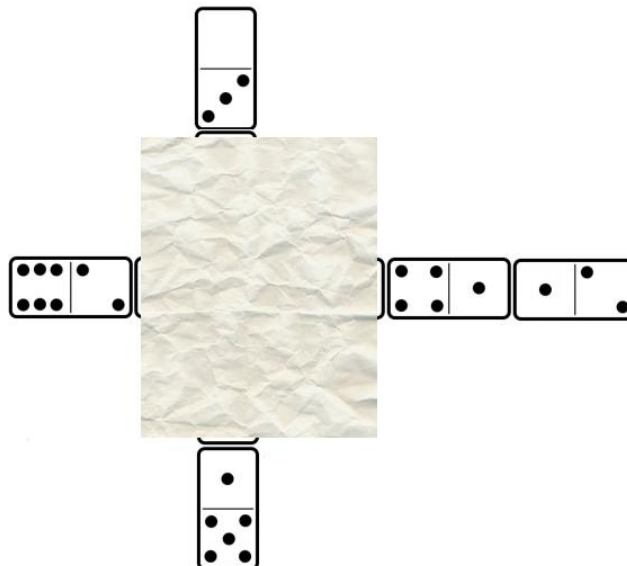
Solução: Observe alguns dos possíveis movimentos, em “L”, do cavalo sobre o tabuleiro:



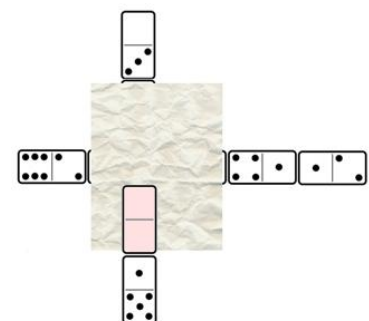
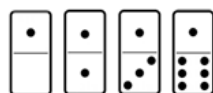


Em cada movimento o cavalo sai de uma casa de uma cor e chega em uma casa de cor diferente. Assim, durante os movimentos, as cores das casas ocupadas pelo cavalo se alternam. Portanto, somente após um número par de movimentos ele pode ocupar a casa de mesma cor que ele ocupava inicialmente.

(Questão 14) Nove peças diferentes de dominó estão sobre uma mesa, parcialmente cobertas por uma folha de papel sulfite. Os dominós se tocam de modo que 1 ponto é vizinho a 1 ponto, 2 pontos são vizinhos a 2 pontos e assim por diante. Qual o total de pontos escondidos pelo papel?

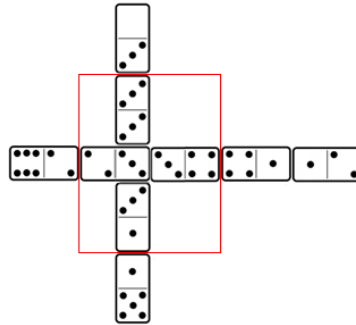


Solução: Para resolver esse problema você deve conhecer o jogo de dominós e saber que devem existir 7 pedras de cada (7 senas, 7 quinas, 7 quadras, e assim por diante). Analisando as pedras que temos a vista percebemos que faltam as pedras (1×0), (1×1), (1×3) e (1×6):



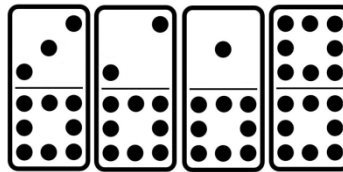
Para a posição destacada ao lado vamos analisar as seguintes opções:

- A “carroça (1×1)” não serve, pois obrigaria a usar a pedra (1×2) mais de uma vez e o jogo de dominós não possui peças repetidas;
 - A pedra (1×6) também não serve, pois obrigaria a usar uma mesma pedra duas vezes;
 - A pedra (1×0) não pode ser usada nesta posição pois obrigaria a usar (0×3) duas vezes;
- Só resta uma alternativa para a posição em destaque. A pedra (1×3)
Analisando as outras possibilidades, o dominó ficará montado assim:



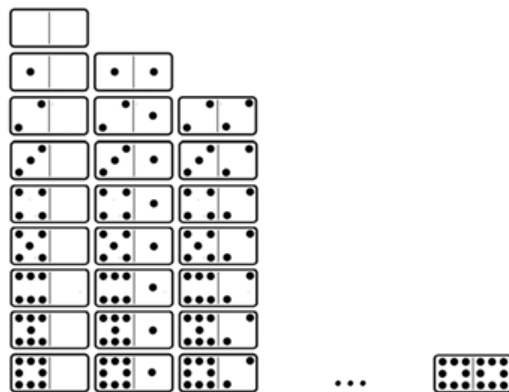
Portanto, são 22 pontos escondidos sob o papel.

(Questão 15) O dominó mais conhecido tem como maior peça o duplo 6. Neste dominó são empregadas 28 peças diferentes. Quantas peças têm um dominó cuja maior peça é o duplo 8?



Encontre a resposta para a pergunta da questão 8 com esse dominó.

Solução: Existem, conforme a ilustração abaixo, 45 peças no dominó cuja maior peça é o duplo 8 e de mesmo modo, como existem dez extremidades com cinco bolinhas no conjunto de dominós, o último quadrado também tem que ter cinco bolinhas.



$$9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1 = 45$$