Algoritmo da Divisão

Uma das propriedades mais importantes dos números naturais é a possibilidade de dividir um número por outro com resto pequeno. Essa é a chamada *divisão euclidiana.*

Sejam dados dois números naturais a e b, com $a > 0$ e b qualquer. Queremos comparar o número natural b com os múltiplos do número a. Para isto, considere todos os intervalos da forma $[na, (n+1)a)$, para n um número natural qualquer. Isto nos dá uma partição de N, ou seja,

$$N = [0, a) \cup [a, 2a) \cup [2a, 3a) \cup ... \cup [na, (n + 1)a) \cup ...$$

e os intervalos acima são dois a dois sem elementos em comum.

Portanto, o número b estará em um e apenas um dos intervalos acima. Digamos que b pertença ao intervalo

$$[qa, (q + 1)a).$$

Logo, existem dois números naturais q e r, unicamente determinados, tais que

$$b = aq + r, \text{ com } 0 \leq r < a.$$

O número b é chamado dividendo, o número a divisor, os números q e r são chamados, respectivamente, quociente e resto da divisão de b por a.

Note que dados dois números naturais a e b, nem sempre b é múltiplo de a, este será o caso se, e somente se, $r = 0$.

Como determinar os números q e r na divisão euclidiana?

Caso $b < a$ Como $b = 0 \times a + b$, temos que $q = 0$ e $r = b$.

Caso $b = a$ Neste caso, tomamos $q = 1$ e $r = 0$.

Caso $b > a$ Podemos considerar a sequência:

$$b - a, b - 2a, ..., b - na,$$

até encontrar um número natural q tal que $b - (q + 1)a < 0$, com $b - qa \geq 0$. Assim, obtemos $b = qa + r$, onde $r = b - qa$ e, portanto, $0 \leq r < a$.

Por exemplo, para dividir o número 54 por 13, determinamos os resultados da subtração de 54 pelos múltiplos de 13:

$$54 - 13 = 41,$$

$$54 - 2 \times 13 = 28,$$

$$54 - 3 \times 13 = 15,$$

$$54 - 4 \times 13 = 2$$

$$54 - 5 \times 13 = -11 < 0.$$

Assim, a divisão euclidiana de 54 por 13 se expressa como:

$$54 = 4 \times 13 + 2.$$

Zero, Um ou Dois?

Nesta seção analisaremos a aritmética dos restos da divisão por 3.

Vamos organizar os números inteiros numa tabela como segue:

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-9	-8	-7
-6	-5	-4
-3	-2	-1
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Note que os números da primeira coluna são os múltiplos de 3, ou seja, os números que deixam resto nulo quando divididos por 3. Os números da segunda e da terceira coluna são, respectivamente, aqueles que deixam resto 1 e 2 quando divididos por 3.

Fazendo uma análise semelhante àquela feita na seção anterior, nota-se que o resto da divisão por 3 da soma ou do produto de dois números só depende da coluna ocupada por esses números, ou seja só depende dos restos da divisão desses números por 3 e não dos números em si.

Assim, atribuindo o símbolo $\overline{0}$ aos números da primeira coluna (que são os múltiplos de 3) e os símbolos $\overline{1}$ e $\overline{2}$, respectivamente, aos números que ocupam a segunda e terceira coluna (que são os números que deixam restos 1 e 2, quando divididos por 3), obtemos as seguintes tabelas que regem os restos da divisão por 3 das somas e produtos dos números naturais:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Exercício: Usando as tabelas acima, ache o resto da divisão por 3 do número $4^100 + 32^30$.

Solução: O resto da divisão por 3 se calcula como segue:

$$\overline{1}^{100} + (\overline{2}^{2})^{15} = \overline{1} + \overline{1}^{1}5 = \overline{1} + \overline{1} = \overline{2}.$$

Aritmética dos restos

Na divisão de dois números naturais a por b existe um quociente q e um resto r tal que $a = bq + r$ sendo que obrigatoriamente $0 \leq r \leq b - 1$. Por exemplo, na igualdade $1649 = 7 \times 235 + 4$ identificamos imediatamente o número 4 como o resto da divisão de 1649 por 7. Por outro lado, na igualdade $415 = 7 \times 58 + 9$, o número 9 não é o resto da divisão de 58 por 7, pois na divisão por 7 o resto deve ser um nuúmero natural menor que 7. Observe que a igualdade $415 = 7 \times 58 + 9$ significa que se temos 415 unidades, estas podem ser organizadas em 58 grupos de 7 unidades cada e em um grupo de 9 unidades. Este último grupo pode ainda ser dividido em um grupo de 7 unidades e em um grupo de 2 unidades, de modo que as 415 unidades ficam organizadas em 59 grupos de 7 unidades cada e em um grupo de 2 unidades, que não pode ser dividido em grupos de 7. Isto significa que $415 = 7 \times 59 + 2$.

Nesta igualdade, identificamos o número 2 como o resto da divisão de 415 por 7.

Exercício: Nas divisões de 163 e 360 por 7 obtemos, respectivamente, restos 2 e 3.

$$163 = 7 \times 23 + 2e360 = 7 \times 51 + 3.$$

Qual é o resto da divisão de $163 + 360$ por 7?
Solucão. É evidente que você pode calcular o valor da soma 163+360 e em seguida dividir este resultado por 7 para obter a resposta desejada. Mas não é isto o que se pretende fazer. Queremos achar a resposta sem calcular a soma $163 + 360$. Para fazer isto, neste primeiro exercício, vamos pensar de um modo bastante concreto. Imagine que você tenha 163 bolinhas. O fato do resto da divisão de 163 por 7 ser igual a 2 implica que estas bolinhas podem ser organizadas em grupos de 7 bolinhas mais um grupo menor de 2 bolinhas. Como o resto da divisão de 360 por 7 é igual a 3, então 360 bolinhas podem ser organizadas em grupos de 7 bolinhas mais um grupo menor de 3 bolinhas. Agora juntando todas as bolinhas, obtemos $163 + 360$ bolinhas que estão organizadas em vários grupos de 7, um grupo de 2 e um grupo de 3 bolinhas, sendo que estes dois últimos grupos podem ser unidos em um único grupo de 5 bolinhas. Portanto todas as $163 + 360$ bolinhas estão organizadas em vários grupos de 7 e em um grupo de 5 bolinhas. Como 5 é um número menor que 7, o que foi feito significa que o resto da divisão de $163 + 360$ por 7 é igual a $5 = 2 + 3$.

De outro modo, podemos chegar nesta mesma conclusão utilizando a propriedade distributiva:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Acompanhe o seguinte desenvolvimento:

$$163 + 360 = (7 \times 23 + 2) + (7 \times 51 + 3) = 7 \times (23 + 51) + (2 + 3) = 7 \times 74 + 5.$$

Nesta igualdade identificamos imediatamente o número 5 como o resto da divisão de $163 + 360$ por 7. Portanto, neste exemplo, vimos que para calcular o resto da divisão da soma $163 + 360$ por 7 bastou somar os restos das divisões dos números 163 e 360 por 7.

Para calcular o resto da divisão de uma soma por um divisor, basta somar os restos das divisões de cada uma das parcelas pelo mesmo divisor. Se a soma dos restos passa do divisor, calcule o resto da divisão pelo divisor dessa soma de restos.

Para calcular o resto da divisão do resultado de uma multiplicação por um divisor, basta multiplicar os restos das divisões de cada uma das parcelas pelo mesmo divisor. Se o produto dos restos passa do divisor, calcule o resto da divisão pelo divisor desse produto de restos.

Múltiplos e divisores

Multiplicando o número 3 por qualquer núumero natural obtém-se os múltiplos positivos de 3. Assim, os múltiplos positivos de 3 são: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... Todos estes números formam o conjunto dos múltiplos positivos de 3, que pode ser representado do seguinte modo:

$$M(3) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...\}.$$

Generalizando, considerando somente números positivos, dado um número natural a, o conjunto dos múltiplos de a é o conjunto

$$M(a) = \{a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, ...\}.$$

Deste modo, dado dois números naturais a e b, dizemos que b é um múltiplo de a se existir um número natural n tal que $b = an$. De modo equivalente, b é múltiplo de a quando o resto da divisão de b por a for igual a zero.

Assim, se m e n são dois números naturais, o produto $p = mn$ é um múltiplo tanto de m quanto de n. Neste caso, também dizemos que m e n são fatores de p. Por exemplo, na multiplicação $24 = 3 \times 8$ podemos dizer que:

- 24 é um múltiplo de 3.
- 24 é um múltiplo de 8.
- 3 é um fator de 24.
- 8 é um fator de 24.

Neste contexto, a palavra fator é um sinônimo da palavra divisor. Ou seja, na multiplicação $24 = 3 \times 8$ também podemos dizer que:

- 24 é divisível por 3.

- 24 é divisível 8.
- 3 é um divisor de 24.
- 8 é um divisor de 24.

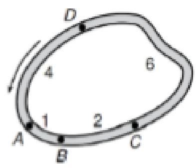
Evidentemente, dado um número natural a, se d é um divisor positivo de a então $1 \leq d \leq a$. Assim, todo número natural possui uma quantidade finita de divisores positivos, enquanto possui uma quantidade infinita de múltiplos. Vejam alguns exemplos de conjuntos de divisores. Observamos que nesta apostila somente vamos considerar múltiplos e divisores positivos.

$$D(7) = \{1, 7\}$$
$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$
$$D(14) = \{1, 2, 7, 14\}$$
$$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

Olhando para o resto de uma divisão, observe que, por exemplo, na divisão de 14 por um número d, o resto desta divisão é zero somente quando d é um divisor de 14, isto é, somente quando $d \in D(14) = \{1, 2, 7, 14\}$. Qualquer número $d \notin D(14)$ faz com que a divisão de 14 por d tenha um resto diferente de zero.

Exercícios

A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são estes postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Solução:

(a) Uma volta completa em torno de uma pista tem extensão $1km + 2km + 6km + 4km = 13km$. Por isto, para percorrer $14km$ é preciso dar uma volta completa e percorrer mais $1km$. A única forma de percorrer $1km$ respeitando-se o sentido da corrida é começaando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.

(b) Como $100 = 7 \times 13 + 9$, uma corrida de $100km$ corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais $9km$. A única forma de percorrer $9km$ respeitando-se o sentido da corrida é começaando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

(c) Como sugerido nos itens anteriores, a solucão do problema está baseada na ideia de d*ar uma certa quantidade de voltas* sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar trechos convenientes para percorrer a *distância restante*. Do ponto de vista matemático, este procedimento corresponde a efetuar o algoritmo de divisão com divisor igual a 13. Por uma inspeção direta, pode-se verificar que é possível executar qualquer corrida com comprimento igual a $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ ou $12km$. Se a corrida tem comprimento um múltiplo qualquer de $13km$, podemos começar num ponto, dar um certo número de voltas, e voltar para o mesmo ponto de partida. E se a corrida tem um comprimento maior que 13, efetuamos a divisão deste número por 13. O quociente corresponde ao número de voltas e o resto é um pedaço de uma volta de comprimento de $1km$ até $12km$, que sempre pode ser percorrido, como comentamos anteriormente. Por exemplo, se a extensão da corrida é $109 = 8 \times 13 + 5$, ela deve começar no posto D, dá 8 voltas completas, retornando então a D, e depois percorre o trecho de D a B, que tem $5km$.

Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:

(a) de 43 por 3
Solução: $43 = 3 \times 14 + 1$

(b) de 43 por 5
Solução: $43 = 5 \times 8 + 3$

(c) de 233 por 4
Solução: $233 = 4 \times 58 + 1$

(d) de 1453 por 10, por 100, por 1000 e por 10000.
Solução: $1453 = 10 \times 145 + 3$, $1453 = 100 \times 14 + 53$, $1453 = 1000 \times 1 + 453$ e $1453 = 10000 \times 0 + 1453$.

Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:
Observação: Se $a > 0$, os possíveis restos da divisão de um número qualquer por a são os números $0, 1, ..., a - 1$.

Por exemplo, os possíveis restos da divisão de um número inteiro por 2 são $r = 0$ ou $r = 1$. Se um dado número quando divido por 2 deixa resto $r = 0$, ele é divisível por 2, ou seja, ele é par.
Se, ao contrário, esse número deixa resto 1 quando dividido por 2, ele é ímpar. Assim, um número é par se é da forma $2q$ e é ímpar se é da forma $2q + 1$, para algum inteiro q.

(a) de -43 por 3
Solução: $-43 = 3 \times (-15) + 2$

(b) de -43 por 5
Solução: $-43 = 5 \times (-9) + 2$

(c) de -233 por 4
Solução: $-233 = 4 \times (-59) + 3$

(d) de -1453 por 10, por 100, por 1000 e por 10000.
Solução: $-1453 = 10 \times (-146) + 7$, $-1453 = 100 \times (-15) + 47$, $-1453 = 1000 \times (-2) + 547$, $-1453 = 10000 \times (-1) + 8547$.