Gabarito:

Resposta da questão 1:
4

Resposta da questão 2:
12 segundos.

Resposta da questão 3:
24 e 144, 48 e 120, 72 e 96.

Resposta da questão 4:
168 cm

Resposta da questão 5:
[C]

Para calcular o número de dias necessários para que seu cão tome os dois remédios juntos novamente devemos calcular o mínimo múltiplo comum entre 6 e $20,$ ou seja, $60.$
Como o medicamento da caixa A é tomado a cada 6 dias, depois de 60 dias já foram tomados $60:6=10$ comprimidos da caixa A, restando 14 comprimidos.

Resposta da questão 6:
[D]

Os elementos do conjunto que não possuem divisores comuns com o número 24, com exceção número 1.
São eles: $\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}.$
Portanto, o indicador do número 24 é o número 8.

Resposta da questão 7:
[C]

Para que João e Pedro se encontrem novamente deve-se passar um número de dias múltiplo de 6 e 4 simultaneamente. Nesse caso, o único número dentre as alternativas que é múltiplo de 6 e 4 simultaneamente é 36.

Resposta da questão 8:
[B]

Se a e b deixam o mesmo resto quando divididos por $n,$ então $a=nx+r$ e $b=ny+r,$ com x sendo o quociente da divisão de a por $n,$ y sendo o quociente da divisão de b por n e r o resto comum. Logo, segue que $a-b=n(x-y)$ e, portanto, $a-b$ é múltiplo de $n.$

Sejam $a=7,$ $b=4$ e $n=3.$ Tem-se que $7-4=3$ é múltiplo de $3.$ Porém, nem 7 e nem 4 são múltiplos de $3.$

Sejam $a=2,$ $b=3$ e $n=6.$ É claro que $2\cdot 3=6$ é múltiplo de $6.$ Contudo, nem 2 e nem 3 são múltiplos de $6.$

Se $d=\text{mdc}(a, b),$ então $a=d\cdot r$ e $b=d\cdot s,$ em que r e s são inteiros positivos. Além disso, lembrando que $\text{mmc}(p, q)\cdot \text{mdc}(p, q)=p\cdot q,$ com p e q sendo inteiros positivos, temos

$$\begin{aligned} d \cdot m = a \cdot b &\Leftrightarrow d \cdot m = (d \cdot r) \cdot (d \cdot s) \\ &\Leftrightarrow m = (r \cdot s) \cdot d \\ &\Leftrightarrow m = k \cdot d,\ k \in \mathbb{Z}_{+}^{*}. \end{aligned}$$

Portanto, m é múltiplo de d.

Resposta da questão 9:
[E]

Sendo $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5,$ $810 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5$ e $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5,$ vem que o máximo divisor comum desses números é $2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270.$ Contudo, se o comprimento das novas peças deve ser menor do que 200 centímetros, então queremos o maior divisor comum que seja menor do que $200,$ ou seja, $3^3 \cdot 5 = 135.$

Em consequência, a resposta é

$$40 \cdot \frac{540}{135} + 30 \cdot \frac{810}{135} + 10 \cdot \frac{1080}{135} = 420.$$

Resposta da questão 10:
[C]

Sendo $162 = 2 \cdot 3^4$ e $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5,$ temos $\text{mdc}(162, 90) = 2 \cdot 3^2 = 18.$ Desse modo, o resultado pedido é dado por

$$\frac{162 + 90}{18} = \frac{252}{18} = 14.$$

Resposta da questão 11:
[B]

Basta calcular o MMC (30, 45, 60) = 180, ou seja, seis meses.

Após o início das competições, o primeiro mês em que os jogos das três modalidades voltarão a coincidir é setembro.

Resposta da questão 12:
[E]

O MMC (30,40,50) = 600, portanto o prêmio em dinheiro será da forma 600K + 25, com $k \in N$.

De acordo com o problema, temos:

2000 < 600k + 25 < 2500

1975 < 600k < 2475

3,29 < k < 4,125. Portanto, k = 4.

Logo, o valor do prêmio será 4.600 + 25 = R$ 2425,00.

Resposta da questão 13:
a) A pista foi dividida em 6 trechos pelos pontos A, B, C, D, E e F.

O ciclista 1 leva 8 minutos = 480 segundos para dar uma volta, portanto 80 segundos para cada um dos trechos.

O ciclista 2 leva 5minutos = 300 segundos para dar uma volta, portanto 50 segundos para cada um dos trechos.

MMC(80,50) = 400 s

Nos primeiros 400 segundos o ciclista 1 ocupa a posição F e o ciclista 2 ocupa a posição C.
Depois de 800 segundos o ciclista 1 e o ciclista 2 ocupam a posição E.

b) Os ciclistas passam a se encontrar a cada 800 segundos em algum dos pontos considerados.
Logo, eles se encontrarão pela segunda vez em 1600 segundos, ou seja, 26 minutos e 40 segundos.

c) 8.800 = 6400s, tomando como referência o ciclista 2, temos: 6400 : 50 = 128 e 128 = $21 \cdot 6 + 2$.
Logo, irão se encontrar no ponto C.

Resposta da questão 14:
[B]

A medida da aresta dos cubos de mesmo volume que preenchem completamente o paralelepípedo retângulo da figura é dada por $\text{mdc}(8, 36, 20) = 4.$ Portanto, o resultado pedido é dado por

$$\frac{8}{4} \cdot \frac{36}{4} \cdot \frac{20}{4} = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90.$$

Resposta da questão 15:
Múltiplo de 7 – Inicialmente, observemos que:

$$\begin{aligned} N &= (n+6m)(2n+5m)(3n+4m) \\ &= (n+7m-m)(2n+7m-2m)(3n+7m-3m) \\ &= (n-m+7m)[2(n-m)+7m][3(n-m)+7m] \\ &= (k+7m)(2k+7m)(3k+7m), \end{aligned}$$

onde $k = n - m$.

Afirmamos que se N é múltiplo de 7, então k é múltiplo de 7. De fato, como 7 é primo e divide N, então um dos fatores $k+7m$, $2k+7m$ ou $3k+7m$ é múltiplo de 7. Temos:

(i) Se $k+7m$ é múltiplo de 7, então $\dfrac{k+7m}{7} = \dfrac{k}{7} + m$ é inteiro, logo k é múltiplo de 7. Segue que $2k$ e $3k$ também são múltiplos de 7 e portanto os três fatores $k+7m$, $2k+7m$ e $3k+7m$ são múltiplos de 7. Concluímos que N é múltiplo de 7^3.

(ii) Se $2k+7m$ é múltiplo de 7, então $\dfrac{2k+7m}{7} = \dfrac{2k}{7} + m$ é inteiro, logo $2k$ é múltiplo de 7. Como 2 e 7 são primos entre si, segue que k é múltiplo de 7, o que leva ao caso anterior.

(iii) Se $3k+7m$ é múltiplo de 7, analogamente concluímos que k é múltiplo de 7.

Resposta da questão 16:

15. ***Encontre o número*** – A opção correta é (a).

Para que $\frac{N}{3}, \frac{N}{4}, \frac{N}{5}, \frac{N}{6}$ e $\frac{N}{7}$ sejam números inteiros, N deve ser um múltiplo comum de 3, 4, 5, 6 e 7. Como queremos o menor N possível, ele deve ser o mínimo múltiplo comum (MMC) de 3, 4, 5, 6 e 7, ou seja,

$$N = 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420.$$

Resposta da questão 17:

Em uma lousa são escritos os 2014 inteiros positivos de 1 até 2014. A operação permitida é escolher dois números a e b, apagá-los e escrever em seus lugares os números $mdc(a, b)$ (Máximo Divisor Comum) e $mmc(a, b)$ (Mínimo Múltiplo Comum). Essa operação pode ser feita com quaisquer dois números que estão na lousa, incluindo os números que resultaram de operações anteriores. Determine qual a maior quantidade de números 1 que podemos deixar na lousa.