1 Construções geométricas de alguns lugares geométricos

Lugar Geométrico é o conjunto de pontos que gozam de uma mesma propriedade. Nesse ultimo encontro falamos um pouco sobre alguns lugares geométricos: reta paralela, mediatrizes, bissetrizes, circunferências e o arco capaz. É importante está atento à definição do lugar geométrico em que se queira usar. Na solução de um problema de construção geométrica, além de ser descrita cada etapa da construção, é preciso justificar por que ela é correta.

Selecionei alguns problemas que achei interessantes:

1. Construa o trapézio isósceles que tem bases medindo $6,5\ cm$ e $2,5\ cm$ e diagonais medindo $5,5\ cm$.
2. Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $BC = 7\ cm$ e as alturas $BD = 5,4\ cm$ e $CE = 6,7\ cm$.

   Dica. saiba que o arco capaz correspondente ao angulo de 90^o é semicircunferência
3. Construir o triângulo ABC de perímetro $11\ cm$ sabendo que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem, respectivamente, 58^o e 76^o.
4. Trace o diâmetro de uma circunferência dada cujo centro é desconhecido.
5. Dada uma circunferência de centro O, construa uma reta tangente à ela.
6. Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $\overline{BC} = 5,3\ cm$, e as mediana $m_b = 4\ cm$ e $m_c = 5\ cm$.
7. Dado um ponto no interior de um triângulo equilátero, foram calculadas as distâncias entre ele a cada vértice do triângulo. Agora temos os valores dessas distâncias, mas não temos mais o triângulo. Construa o triângulo do experimento sabendo essas informações e usando uma régua não graduada e compasso.
8. Construir o triângulo ABC conhecendo a mediana $AA' = 5\ cm$ e as alturas $BD = 6\ cm$ e $CE = 4,7\ cm$

2 Soluções:

1. Em uma reta r, marque um segmento de reta AB medindo $6,5\ cm$ e o segmento de reta BE medindo $2,5\ cm$, de modo que B esteja entre A e E. Trace as circunferências centradas em A e E ambas de raio medindo $5,5\ cm$, e seja C um dos pontos de interseção destas duas circunferências. Em particular, tem-se $AC = CE = 5,5\ cm$. Trace a reta s paralela à reta r passando por C (a construção da reta paralela a uma reta dada passando por um ponto dado é mostrada na página 5 da Apostila 8). Trace a reta t passando por B e que é paralela à reta que contém os pontos C e E, e seja D o ponto de interseção das retas s e t. Como as retas r e s são paralelas e a reta t é paralela à reta que contém os pontos C e E, então $BECD$ é um paralelogramo e, logo, $CD = BE = 2,5\ cm$ e $BD = CE = 5,5\ cm$. Como $AB = 6,5\ cm$, $CD = 2,5\ cm$ e $AC = BD = 5,5\ cm$ então $ABCD$ é o trapézio isósceles pedido.
2. Dado o segmento de reta $BC = 7\ cm$, traçamos a circunferência centrada em B de raio BC e a circunferência centrada em C de raio BC. Traçamos a reta que passa pelos pontos de interseção dessas duas circunferências. Tal reta intersecta BC em seu ponto médio M. Traçamos a circunferência C_1 centrada em M de raio BM. Tal circunferência tem BC como um de seus diâmetros. Dado o segmento de reta $BD = 5,4\ cm$, traçamos a circunferência C_2 centrada em B de raio BD. Dado o segmento de reta $CE = 6,7\ cm$, traçamos a circunferência C_3 centrada em C de raio CE. A circunferência C_2 intersecta a circunferência C_1 no ponto D de modo que o ângulo $B\hat{D}C$ é reto, já que BC é diâmetro de C_1. A circunferência C_3 intersecta a circunferência C_1 no ponto E de modo que o ângulo $B\hat{E}C$ é reto, já que BC é diâmetro de C_1. Seja A o ponto de interseção das retas CD e BE. Como BD é perpendicular a AC e CE é perpendicular a AB , então o triângulo ABC tem BD e CE como alturas.

3. Trace uma reta e sobre ela marque um segmento de reta PQ de medida 11 cm. Construa a bissetriz do ângulo de 58°, obtendo assim um ângulo de 29°. Trace o ângulo $QPU = 29^o$. A construção do ângulo $QPU = 29^o$ a partir de um ângulo de 29° está descrita no Problema 4 da pág. 11 da Apostila 8. Construa a bissetriz do ângulo de 76°, obtendo assim um ângulo de 38°. Trace o ângulo $PQV = 38^o$, de modo que o ponto V esteja no mesmo semiplano do ponto U relativamente à reta PQ. Marque o ponto A de interseção da reta PU com a reta QV. Trace a mediatriz do segmento de reta AP (a construção da mediatriz de um segmento de reta está descrita na pág. 19 da Apostila 8) e marque o ponto B de interseção desta mediatriz com a reta PQ. O ponto B está no segmento PQ. Trace a mediatriz do segmento de reta AQ e marque o ponto C de interseção desta mediatriz com a reta PQ. O ponto C está no segmento BQ. Obtém-se assim um triângulo ABC. Como B pertence à mediatriz de AP, então $BP = AB$. Como $BP = AB$, então no triângulo ABP os ângulos internos nos vértices P e A são congruentes e, logo, o ângulo interno de ABP no vértice A mede 28°. Como o ângulo interno de ABC no vértice B é um ângulo externo de ABP, então, pelo Teorema do Ângulo Externo, ele mede $29^o + 29^o = 58^o$. Analogamente, conclui-se que $CQ = AC$ e que o ângulo interno de ABC no vértice C mede $38^o + 38^o = 76^o$. Como o ponto B está entre P e Q, e o ponto C está entre B e Q, então $PB + BC + CQ = PQ = 11$ cm. Como $PB = AB$, $CQ = AC$ e $PB + BC + CQ = PQ = 11$ cm, então $AB + BC + AC = 11$ cm, ou seja, ABC tem perímetro 11 cm. Assim, ABC é mesmo o triângulo procurado.

4. Observe a construção no link: Construção

   JUSTIFICATIVA: Obtemos o diâmetro traçando a mediatriz do segmento AB. Imaginemos que temos o ponto central da circunferência, então podemos fazer um triangulo isosceles de base AB. Observe que em todo triangulo isosceles a mediatriz é uma perpendicular ao segmento AB, logo traçando a mediatriz do segmento AB podemos obter o diâmetro de uma circunferência. Veja: Imagem

5. (Reposta dada por talita_10 no PIC2010) para fazer a reta tangente à circunferência de centro O vamos seguir os seguintes procedimentos: Construção

   1) Fazemos uma circunferência de centro O

   2) Marcamos um ponto A por onde passará a reta tangente a circunferência

   3)Fazemos o segmento OA

   4) Para achar o ponto médio de $\overline{AO}$, tiramos sua mediatriz

   4.1) Com centro em O fazemos uma circunferência de raio OA

   4.2) Com centro em A fazemos outra circunferência de raio OA

   4.3) O encontro das duas circunferências são os pontos B e C. Traçamos $\overline{BC}$ e sua interseção com $\overline{OA}$ é o ponto B

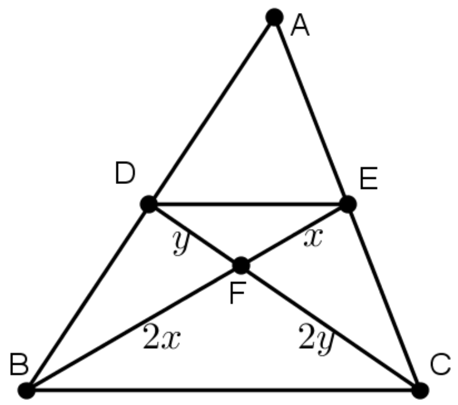
   5) Fazemos a circunferência de diâmetro OA

   6) A interseção desta com a circunferência dada inicialmente são os pontos por onde passam as retas tangentes. Fazemos então as retas

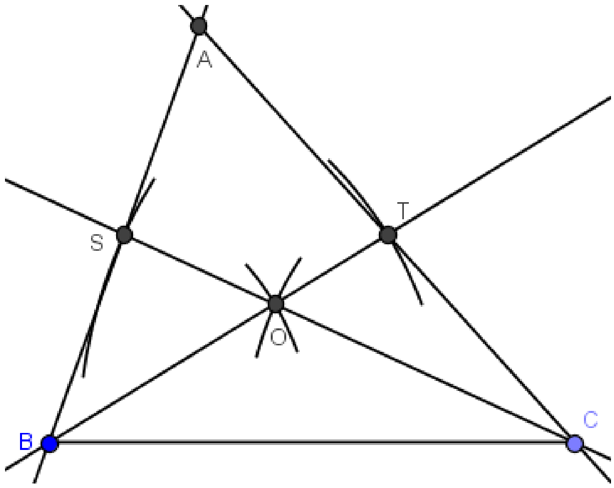
   Justificativa: Tendo uma circunferência de centro O e uma reta tangente à essa circunferência em um ponto D, o raio OD é perpendicular à tangente que passa por D. Sabendo disso, nossa construção se justifica assim: Se fosse dado o segmento OA, e devessemos construir o arco capaz de 90°, a construção seria praticamente idêntica à que fizemos. Sendo assim, A construção feita se justifica pelo fato de ser feito uma arco capaz de 90°.

6. Sendo O o ponto de interseção entre as medianas (Baricentro) então temos $BO = m_b\frac{2}{3}$ e $CO = m_c\frac{2}{3}$. Reciproca do Teorema de Tales: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$ então $DE||BC$. Se D e E são os pontos médios de AB e AC respectivamente, então pelo teorema da Base Média $BC = 2DE$, logo: $\triangle DEF \sim \triangle BCF(casoAA)$, $C\hat{D}E \equiv D\hat{C}B$ e $D\hat{E}B \equiv C\hat{B}E$ (ambos internos alternos) daí, se $DF = y$ e $EF = x$ então:

   $\frac{1}{2} = \frac{y}{FC} \Rightarrow FC = 2y$
   $\frac{1}{2} = \frac{x}{FB} \Rightarrow FB = 2x$



Então obtendo o ponto O podemos construir o triangulo, mas primeiro vamos encontrar as medidas BO e CO: Construção



1º dado o segmento BC trace por B e C uma circunferência de raio BO e CO, respectivamente. No ponto de interseção teremos o ponto O.

2º prolongue BO e CO.

3º Trace por B e C uma circunferência de medida m_b e m_c, respectivamente. Nos pontos de interseção com os segmentos prolongados obteremos os "pés"das mediatrizes.

4º Trace uma reta que passe por B e S e outra que passe por C e T. No ponto de interseção entre elas sera determinado o ponto A.

A construção é justificada pela propriedade do baricentro já explicada anteriormente.

7. Construção

   1)Faça um angulo de 60º.

   2)No vértice O do angulo faça uma circunferência com umas das medidas (a)

   3)Faça duas circunferências com centros nos pontos de interseção entre as retas e a circunferência de raio a, com raio b e c, cada circunferência em um ponto.

   4)No ponto de interseção C entre as duas circunferências (passo 3), trace OC.

   5)OC é a medida do lado do triangulo equilátero, então é só construir um triangulo equilátero de lado OC.

   Justificativa:

   Observe nesse gif que construímos o quadrilátero $OTCM$, sabendo as medidas de seus lados ($a,\ a,\ b,\ c$) e que a medida do angulo $\gamma + \beta = 60º$(lados adjacentes $OM,\ OT$), onde a diagonal OC é a medida do lado do triangulo equilátero.

8. Construção