Exercício 1.

(a) Quantos são os anagramas da palavra CINEMA.

(b) Em quantos destes anagramas as letras CI aparecem juntas e nesta ordem?

(c) Em quantos anagramas a letra A aparece antes (a esquerda) da letra E ?

Solução. Esta foi uma das questões dissertativas da segunda Tarefa de Fórum.

(a) Como a palavra **CINEMA** possui 6 letras diferentes, ela possui 6! = 720 anagramas.

(b) Vamos considerar a sílaba **CI** como um único "objeto". Sendo assim temos cinco objetos para permutar {**CI**, **N**, **E**, **M**, **A**}. Logo temos 5!= 120 anagramas da palavra **CINEMA** em que as letras **CI** aparecem juntas nessa ordem.

(c) (primeira solução) Temos que a quantidade de anagramas em que a letra **A** aparece antes da letra **E** é igual a quantidade de anagramas em que a letra **E** aparece antes da letra **A**. Como o total de anagramas é 720, a letra **A** aparece a esquerda de **E** em metade desse total, ou seja, em 720/2 = 360anagramas.

(c) (segunda solução) Vamos contar de quantas maneiras diferentes podemos escolher duas posições no anagrama em que podemos colocar a letra **A** antes da letra **E**.

• Se a letra **A** está na primeira posição do anagrama, então a letra **E** pode ser colocada em qualquer uma das outras 5 posições.

• Se a letra **A** está na segunda posição do anagrama, então a letra **E** pode ser colocada em qualquer uma das 4 posições a direita do **A**.

• Se a letra **A** está na terceira posição do anagrama, então a letra **E** pode ser colocada em qualquer uma das 3 posições a direita do **A**.

• Se a letra **A** está na quarta posição do anagrama, então a letra **E** pode ser colocada em qualquer uma das 2 posições a direita do **A**.

• Se a letra **A** está na quinta posição do anagrama, então a letra **E** pode ser colocada apenas na última posição do anagrama.

Somando estas possibilidades, obtemos 5+2+3+2+1 = 15 maneiras de colocar a letra **A** a esquerda da letra **E** no anagrama. Depois de escolhida uma destas maneiras, as outras letras do anagrama podem der permutadas de 4!=24 maneiras diferentes. Deste modo, concluímos que a palavra **CINEMA** admite 15 x 24 = 360 anagramas em que a letra **A** aparece antes da letra **E**.

Exercício 2.

Em um corredor existem 5 portas e você possui um chaveiro com as 5 chaves dessas portas. Quantas vezes, no mínimo, você deve testar as chaves nas portas para ter a certeza de conseguir identificar a chave correta de cada uma das cinco portas?

Solução. Devemos considerar a possibilidade de você ser muito azarado, de sempre achar a chave correta na última tentativa possível. Por exemplo, para a primeira porta pode ser que você experimentou 4 chaves, e que nenhuma dessas chaves abriu a porta. Se este é o caso, aquela chave que ainda não foi testada é a chave que abre a primeira porta. Então para encontrar a chave da primeira porta são necessárias 4 tentativas.

Depois de encontrada a chave da primeira porta, sobram 4 chaves para a segunda porta. De modo análogo, pode ser que você experimentou 3 dessas chaves e que nenhuma delas abriu a porta. Neste caso, aquela chave que ainda não foi utilizada é a que abre a segunda porta. Deste modo, para encontrar a chave da segunda porta são necessárias 3 tentativas.

Continuando deste modo, vemos que são necessárias 4+3+2+1= 10 tentativas para determinar, com certeza, as chaves corretas das cinco portas.

Exercício 3. Em cada caso, calcule a quantidade de divisores positivos dos números dados.

(a) $2^3 \cdot 7^2$

(b) $2^3 \cdot 3^2$

(c) $2 \cdot 6^2$

(d) $3^5 \cdot 5^4$

(e) $2 \cdot 3^7 \cdot 5^6$

Observação: Veja o exemplo 35 da página 53 da apostila Encontros de Aritmética. No Portal da Matemática, assistir os vídeos: 6º Ano do Ensino Fundamental – módulo de "divisibilidade" – aula "conjunto e quantidade de divisores" – videouaulas:

o Conjunto e quantidade de divisores

o Exercícios sobre quantidade de divisores

Respostas:

(a) (3+1)(2+1)= 12divisores.

(b) (3+1)(2+1)=12 divisores.

(c) Neste item o número $2 \bullet 6^2$ não está fatorado como um produto de números primos. O número $2 \bullet 6^2$ é igual ao número $2^3 \cdot 3^2$ do item (b).

(d) (5+1)(4+1)=30 divisores.

(e) (1+1)(7+1)(6+1)=112 divisores.

Exercício 4. Quantos são os números inteiros positivos de 5 algarismos que não têm algarismos adjacentes iguais?

Solução. Queremos contar quantos são os números *abcde* de cinco algarismos tais que: $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq d$, $d \neq e$.

• Como não podemos começar pelo algarismo zero, o algarismo *a* pode ser escolhido de 9 maneiras diferentes.

• Em seguida, o algarismo também *b* pode ser escolhido de 9 maneiras diferentes, pois devemos escolher $b \neq a$.

• Depois de escolhidos os algarismos *a* e *b*, o algarismo *c* pode ser escolhido de 9 maneiras diferentes, pois devemos escolher $c \neq b$.

• Continuando deste modo, vemos que podemos escolher os algarismos *c* e *d* de 9 maneiras diferentes cada um deles.

Portanto, podemos formar $9 \mathrm{x} 9 \mathrm{x} 9 \mathrm{x} 9 \mathrm{x} 9 = 9^5$ números.

Exercício 5. Considere todos os números naturais com cinco algarismos distintos formados pelas permutações dos algarismos do número 13459. Coloque todos estes números em fila, em ordem crescente. Em qual posição desta fila está o número 54931?

Solução. Vamos contar quantos são os números *abcde* que estão antes do número 54931.

• Este número *abcde* está antes de 54931 se $a \in \{1,3,4\}$ e os demais quatro algarismos são quaisquer. Neste caso obtemos 3x(4!) = 72 números.

• Agora se a=5, o número tem a forma *5bcde*. Este número está antes de 54931 se $b \in \{1, 3\}$ e os outros três algarismos são quaisquer. Neste caso obtemos 2x(3!) = 12 números.

• Agora se $a=5$ e $b=4$ o número tem a forma 54cde. Este número está antes de 54931 se $c \in \{1,3\}$ e os outros dois algarismos são quaisquer. Neste caso obtemos $2x(2!) = 4$ números.

• Agora se $a=5, b=4$ e $c=9$ então o número tem a forma 549de . A única possibilidade de um tal número ser menor do que 54931 é este número ser igual a 549de=54913 .

Portanto obtemos 72+12+4+1=89 números antes de 54931. Isto significa que o número 54931 esta na posição 90 da fila.

Exercício 6. (OBM 2009 – N2Q7 – 1ª fase) Um número natural A de três algarismos detona um número natural B de três algarismos se cada algarismo de A é maior do que o algarismo correspondente de B. Por exemplo, 876 detona 345; porém, 651 não detona 542 pois $1 < 2$. Quantos números de três algarismos detonam 314?

Solução. Para um número *abc* de três algarismos detonar 314 devemos ter $a \in \{4,5,6,7,8,9\}$, $b \in \{2,3,4,5,6,7,8, 9\}$ e $c \in \{5,6, 7,8, 9\}$.

Portanto existem 6 possibilidades para a, 8 possibilidades para b e 5 possibilidades para c. Então existem 6x8x5 =240 números que detonam 314.

Exercício 7. Com os elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ são formados números com três algarismos distintos. Em quantos desses números a soma dos algarismos é par?

Solução. Primeiramente observe que no conjunto A existem 3 números pares e 4 números ímpares. Para a soma $a+b+c$ dos algarismos do número *abc* ser par, existem quatro possibilidades:

• a, b e c são pares. Neste caso, existem 3 x 2 x 1= 6 números.

• a par, b ímpar e c ímpar. Neste caso, existem 3x4x3 =36 números.

• a ímpar, b par e c ímpar. Neste caso, existem números 4x3x3=36.

• a ímpar, b ímpar e c par. Neste caso, existem 4x3x3 =36 números.

Portanto encontramos 6+36+36+36=114 números.

Exercício 8. Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos 1,2,3,4,5 podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismo 1 seguido imediatamente pelo algarismo 3. De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?

Solução. Com os algarismos 1,2,3,4,5 podemos formar ao todo 5x5x5x5 $=5^4=$ 625 senhas de quatro dígitos. Deste total vamos subtrair a quantidade de senhas em que o número 13 aparece. O algarismo 13 pode aparecer no começo, no meio ou no final da senha. Em cada uma destas possibilidades, a quantidade de senhas possíveis é igual a 5x5 = 25 pois podemos escolher livremente os outros dois algarismos da senha. Entretanto é importante observar que nesta contagem a senha 1313 foi contada duas vezes: uma vez quando consideramos o número 13 no início da senha e outra vez quando consideramos o número 13 no final da senha. Deste modo, a quantidade de senhas em que o número 13 aparece é igual a 3x25-1=74 . Daí vemos que a quantidade de senhas que a Maria pode formar é igual a 625-76 = 551 .

Exercício 9. Quantos são os números pares com três algarismos distintos?

Primeira solução. Vamos contar quantos são os números abc pares e de três algarismos distintos. Para o número ser par, $c \in \{0,2,4,6,8\}$ e para o número ter três algarismos $a \neq 0$. Daí segue a necessidade de dividir em dois casos:

• Suponhamos que $c = 0$. Neste caso existe uma única possibilidade para c, existem 9 possibilidade para a, pois $a \neq 0$. E existem 8 possibilidades para b. Neste caso encontramos 1x9x8=72 números.

• Suponhamos que $c \in \{2,4,6,8\}$. Neste caso existem 4 possibilidades para c. Em seguida existem 8 possibilidades para a pois devemos considerar que $a \neq 0$ e $a \neq c$. E em seguida existem 8 possibilidades para b pois devemos escolher este algarismo de modo que $b \neq a$ e $b \neq c$. Neste caso encontramos 4x8x8 =256 números.

Somando concluímos que existem 256+72=328 números naturais pares com três algarismos distintos.

Exercício 10. Um cubo de madeira com 10 cm de aresta tem as suas faces coloridas de azul. Se este cubo foi inteiramente dividido em cubinhos com 1 cm de aresta, calcule:

(a) A quantidade total de cubinhos.

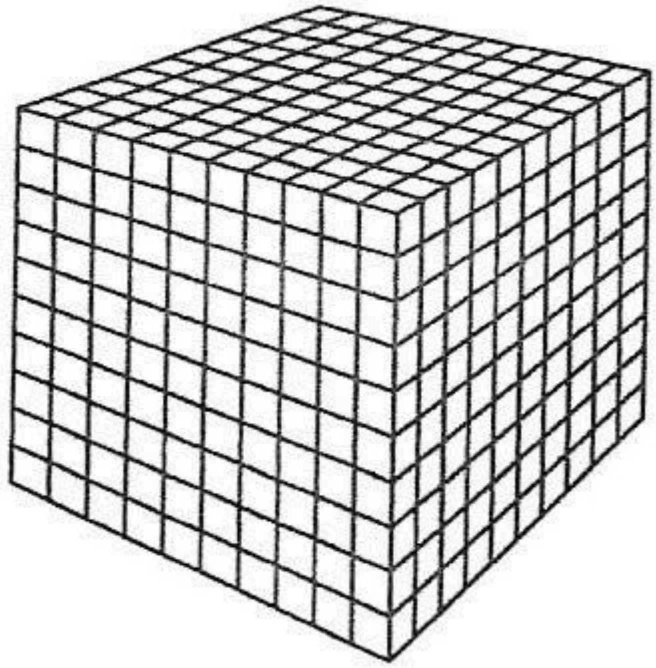
(b) A quantidade de cubinhos com nenhuma face colorida de azul.

(c) A quantidade de cubinhos com exatamente uma face colorida de azul.

(d) A quantidade de cubinhos com exatamente duas faces coloridas de azul.

(e) A quantidade de cubinhos com exatamente três faces coloridas de azul.

(f) A quantidade de cubinhos com mais de três faces coloridas de azul.



Solução.

(a) O cubo foi dividido em 10x10x10 =1000cubinhos.

(b) Devemos retirar do cubo de madeira todos os cubinhos superficiais, obtendo um novo cubo com 8 cm de aresta. Este cubo está dividido em 8x8x8 =512 cubinhos.

(c) Cada face do cubo de madeira é formada por 10x10 =100 cubinhos. Nesta face devemos considerar apenas os cubinhos que estão no interior da face, ou seja, cubinhos que não encostam em nenhuma aresta do cubo de madeira. Nesta face, existem 8x8 =64 cubinhos com exatamente uma face colorida de azul. Como o cubo de madeira possui 6 faces, existem então 6x64 = 384 cubinhos com exatamente uma face colorida de azul.

(d) Ao longo de uma aresta do cubo de madeira existem 8 cubinhos com exatamente duas faces coloridas de azul. Como o cubo de madeira possui 12 arestas, existem então 8x12 = 96 cubinhos com exatamente duas faces coloridas de azul.

(e) Apenas os 8 cubinhos que estão nos vértices do cubo de madeira possuem exatamente três faces coloridas de azul.

(f) Nenhum cubinho possui mais de três faces coloridas de azul.

Exercício 11.

(a) Liste todos os subconjuntos de um conjunto com dois elementos {*a, b}*

(b) Liste todos os subconjuntos de um conjunto com três elementos. *{a, b, c}*

(c) Considere agora um conjunto *{a, b, c, d}* com quatro elementos. Para listar todos os subconjuntos desse conjunto, observe que existem duas possibilidades: ou o subconjunto não contém o elemento ***d*** , e daí ele é um subconjunto de *{a, b, c}* , ou o subconjunto contém o elemento ***d*** , e daí ele é a união de um subconjunto de *{a, b, c}* com o conjunto *{d}* . Desta observação conclua que o conjunto *{a, b, c, d},* de quatro elementos, possui o dobro de subconjuntos do conjunto *{a,b,c}* , de três elementos.

(d) Conclua que um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos

Solução.

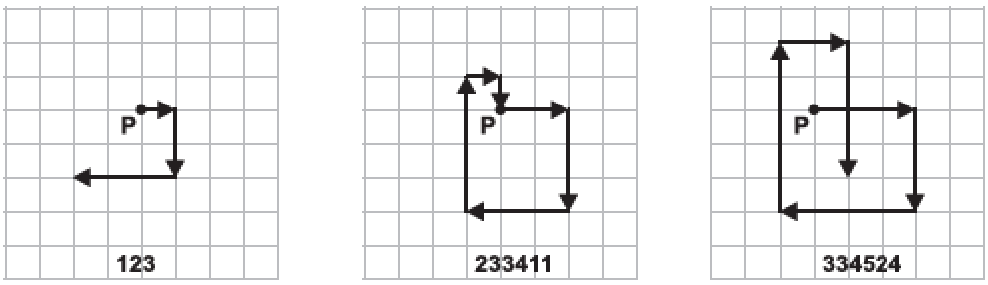
(a) Os subconjuntos de *{a,b}*são: ∅ , *{a},{b}* ,*{a,b}* . Portanto um conjunto com 2 elementos possui 4 $=2^2$ subconjuntos.

(b) Para formar os subconjuntos de *{a,b,c}* podemos considerar inicialmente os subconjuntos que não contém o elemento c. Estes subconjuntos foram listados no item (a) e são ∅, *{a},{b}* ,*{a,b}.* Em seguida podemos considerar os subconjuntos que contém o elemento c . Para formar esses subconjuntos basta fazer a união de cada conjunto que apareceu no item (a) com o conjunto {c}. Neste caso obtemos os subconjuntos *{c}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}* . Portanto, os subconjuntos de são ∅, *{a},{b}, {c},{a,b},{a,c}, {b,c}, {a,b,c}.* Portanto um conjunto com 3 elementos possui 8 = 2^3 subconjuntos.

(c) Os subconjuntos de *{a,b,c,d}* que não contém o elemento d foram listados no item (c) e são: ∅, *{a},{b}, {c},{a,b},{a,c}, {b,c}, {a,b,c}* . Para formar um subconjunto *{a,b,c,d}* de que contém o elemento d basta fazer a união dos conjuntos que apareceram no item (c) com o conjunto {d}. Daí os subconjuntos de *{a,b,c,d}* que contém o elemento d são:*{d}, {a,d}, {b,d}, {c,d}, {a,b,d},{a,c,d}, {b,c,d}, {a,b,c,d}* . Daí um conjunto com 4 elementos possui $16=2^4$ subconjuntos.

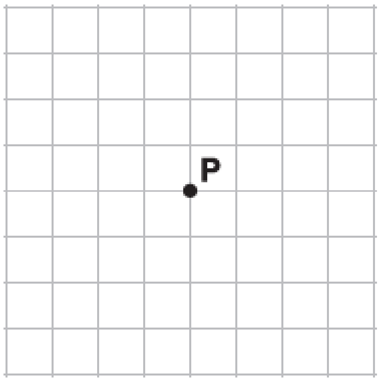
(d) Procedendo como explicado nos item (b) e (c) vemos que a cada elemento que acrescentamos em um conjunto, dobramos a quantidade de subconjuntos. Daí podemos concluir que se um conjunto possui n elementos, então ele possui 2^n subconjuntos.

Exercício 12. (OBMEP 2013 - N2Q4 – 2ª fase) A assinatura geométrica de um número natural formado por algarismos diferentes de 0 é uma sequência de segmentos traçados sobre um quadriculado cujos quadradinhos têm 1 cm de lado. Os segmentos são traçados a partir de um ponto fixo P, para a direita, para baixo, para a esquerda, para cima, para a direita e assim por diante. O tamanho dos segmentos depende dos algarismos do número, como exemplificado a seguir.



Para obter a assinatura geométrica do número 334524, traça-se um segmento de 3 cm para a direita a partir de P, outro de 3 cm para baixo, outro de 4 cm para a esquerda, outro de 5 cm para cima, outro de 2 cm para a direita e outro de 4 cm para baixo. Na figura, vemos as assinaturas geométricas dos números 123, 233411 e 334524.

(a) Trace no quadriculado a assinatura geométrica do número 123456.

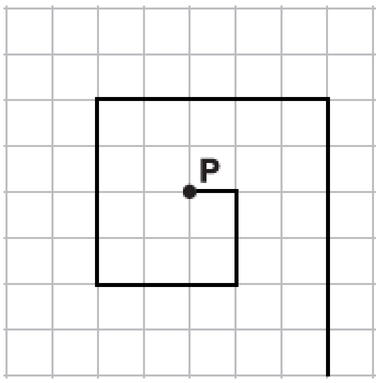


(b) Quantos são os números de quatro algarismos que têm assinatura geométrica fechada, isto é, começando e terminando em P?

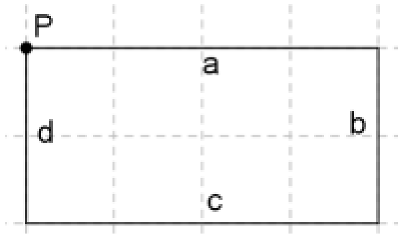
(c) Quantos são os números de cinco algarismos que têm assinatura geométrica fechada?

Solução.

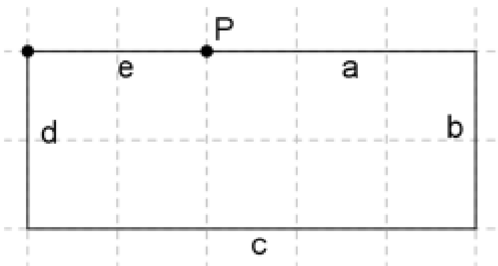
(a) A assinatura geométrica do número 123456 está representada na figura a seguir:



(b) Seja abcd um número com quatro algarismos a, b, c e d não nulos. A assinatura geométrica de abcd possui quatro segmentos consecutivos de comprimentos a, b, c e d, traçados de acordo com o enunciado. Ela será fechada se e somente se esses traços formarem um retângulo, ou seja, se e somente se a=c e b=d (veja figura a seguir). Temos as escolhas de 1 a 9 para a=c e também para b=d, totalizando 9x9=81escolhas. Segue que temos 81 números de quatro algarismos cuja assinatura geométrica é fechada.



(c) Seja abcde um número com cinco algarismos a, b, c, d e e não nulos. Como no item anterior, a assinatura geométrica de abcde será fechada se e somente os segmentos de comprimento a, b, c, d e e formarem um retângulo como na figura a seguir, ou seja, se e somente se a+e=c e b=d .



Como no item anterior, temos as escolhas de 1 a 9 para b=d.

Vamos agora contar de quantas maneiras é possível escolher a, c e e de modo que a+e=c. Exceto para o caso c=1, quando não há valores possíveis para a e e, podemos escolher valores de 1 até c-1 para a e, em cada caso, o valor de e fica determinado como c-a. Em outras palavras, para cada c é possível escolher a e e tais que a+e=c de c-1 maneiras diferentes (notamos que no caso c=1 temos c-1=0). Como c varia de 1 a 9, o número de escolhas possíveis para a e e é 0+1+2+3+4+5+6+7+8=36. Finalmente, segue do princípio multiplicativo que temos 9x36 =324números de cinco algarismos cuja assinatura geométrica é fechada.