# Resolução das questões do 1º simulado – Nível 1 do 11º PIC

Organizado pelo professor virtual **Jamir Gonçalves Ferreira (região RS02)**

## QUESTÃO 1

**a)** Como o número total de alunos é igual ao número de alunos que comem peixe mais o número de alunos que não comem peixe, podemos escrever

$$\frac{não\ comem\ peixe + comem\ peixe}{total} = \frac{não\ comem\ peixe}{total} + \frac{comem\ peixe}{total} = 1$$

Ou seja,

$$\frac{não\ comem\ peixe}{total} = 1 - \frac{comem\ peixe}{total} = 1 - \frac{13}{18} = \frac{18-13}{18} = \frac{5}{18}$$

De forma semelhante, calculamos a fração correspondente aos alunos que não comem verdura:

$$\frac{não\ comem\ verdura}{total} = 1 - \frac{comem\ verdura}{total} = 1 - \frac{15}{12} = \frac{12-5}{12} = \frac{7}{12}$$

Dessa forma, completamos a tabela da seguinte maneira:

| | **Peixe** | **Verdura** |
|---|---|---|
| **Sim** | $\frac{13}{18}$ | $\frac{5}{12}$ |
| **Não** | $\frac{5}{18}$ | $\frac{7}{12}$ |

**b)** Esta questão tem duas soluções possíveis.

**1ª solução:**

Como $\frac{13}{18} < \frac{7}{12}$, vemos que o número de alunos que comem peixe é maior que o número de alunos que não comem verdura. Logo, entre os alunos que comem peixe, há pelo menos um que também come verdura. Alternativamente, como $\frac{5}{12} > \frac{5}{18}$, vemos que o número de alunos que comem verdura é maior que o número de alunos que não comem peixe, e a conclusão segue do mesmo modo.

**2ª solução:**

Como

$$\frac{comem\ peixe + comem\ verdura}{total} = \frac{comem\ peixe}{total} + \frac{comem\ verdura}{total} = \frac{13}{18} + \frac{5}{12} = \frac{26+15}{36} = \frac{41}{36} > 1$$

temos $comem\ peixe + comem\ verdura > total$, o que só é possível quando pelo menos um aluno come peixe e também verdura. Alternativamente, temos $\frac{5}{18} + \frac{7}{12} = \frac{31}{36} < 1$, o que nos mostra que $não\ comem\ peixe + não\ comem\ verdura < total$ e a conclusão segue do mesmo modo.

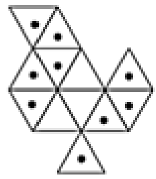
**c)** Como todos os alunos que comem verdura também comem peixe temos

$$\frac{comem\ peixe\ mas\ não\ comem\ verdura}{total} = \frac{comem\ peixe\ -\ comem\ verdura}{total} = \frac{comem\ peixe}{total} - \frac{comem\ verdura}{total} = \frac{13}{18} - \frac{5}{12} = \frac{26\ -\ 15}{36} = \frac{11}{36}$$

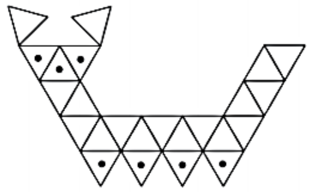
Logo, $\frac{11}{36}$ do número total de alunos corresponde a 22 alunos. Logo, $\frac{1}{36}$ do número total de alunos corresponde a $\frac{22}{11} = 2$ alunos e então o número total de alunos é $\frac{36}{11} \times 22 = 72$. Logo o número de alunos que não comem verdura é $\frac{7}{12} \times 72 = 42$.

## QUESTÃO 2

**a)** A figura é composta de 12 triângulos iguais. Como $\frac{3}{4}$ de 12 é $\frac{3}{4} \times 12 = 9$, devemos marcar 9 triângulos quaisquer, como ao lado, por exemplo.



**b)** A figura é composta de 24 triângulos iguais. Como $\frac{1}{4}$ de 24 é igual a 6 $\frac{1}{3}$ de 24 é igual a 8, concluímos que o número de triângulos a serem pintados é um número maior do que 6 e menor do que 8. Logo, devem ser marcados 7 triângulos quaisquer, como ao lado, por exemplo.

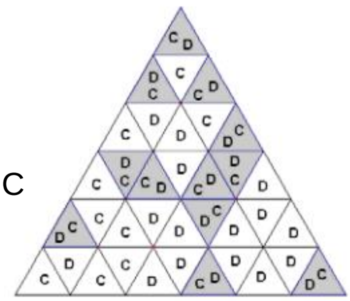


**c)** Esta questão tem três soluções possíveis.

**1ª solução:**

A figura é composta de 36 triângulos iguais. Chico Bento escreveu C em $\frac{7}{12} \times 36 = 21$ triângulos e Doralina escreveu D em $\frac{3}{4} \times 36 = 27$ triângulos, totalizando assim $21 + 27 = 48$ marcas. Como todos os triângulos foram marcados e só existem 36 deles, concluímos que o número de triângulos marcados com duas letras é igual a $48 - 36 = 12$. Este número corresponde a $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ dos triângulos.

**2ª solução:**



A figura é composta de 36 triângulos iguais. Chico Bento escreveu C em $\frac{7}{12} \times 36 = 21$ triângulos e Doralina escreveu D em $\frac{3}{4} \times 36 = 27$ triânglos. Chico Bento deixou $36 - 21 = 15$ triângulos em branco. Doralina, ao marcar seus 27 triângulos, preencheu estes 15 e mais $27 - 15 = 12$ triângulos, que ficaram então com duas marcas.

**3ª solução:**

Chico Bento e Doralina marcaram juntos $\frac{7}{12}+\frac{3}{4}+\frac{7+9}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$ dos triângulos. Como $\frac{1}{4}=1+\frac{1}{3}$ segue que o número de triângulos marcados duas vezes é $\frac{1}{3}$ do total, ou seja, é igual a $\frac{1}{3}\times 36=12$ triângulos.

## QUESTÃO 3

**a)** Há apenas três maneiras de escrever 1 como soma de três números naturais: $1=1+0+0$, $1=0+1+0$ e $1=0+0+1$, que nos dão as possibilidades 1001, 0101 e 0011. Os números 0101 e 0011 devem ser descartados, pois não têm quatro algarismos significativos. Logo na coleção do Joãozinho aparece o número 1001.

**b)** Primeiro, notamos que se um número com algarismos não nulos está na coleção, então ele tem no máximo 10 algarismos. De fato, se ele tivesse 11 ou mais algarismos não nulos então a soma de todos seus algarismos, exceto o das unidades, seria no mínimo 10, o que não é possível pois o maior algarismo é o 9. Logo todos os números com algarismos não nulos na coleção têm no máximo 10 algarismos, o que mostra que existe um maior número sem o 0 na coleção. Vamos supor que a coleção do Joãozinho está completa. O número 2316 está na coleção; trocando o 3 por 111 obtemos 211116, que também está na coleção e é maior que 2316, pois tem mais algarismos. Em geral, se um número sem o algarismo 0 está na coleção e tem algum algarismo que não o das unidades diferente de 1, podemos "espichar" o número, trocando esse algarismo por uma sequência de 1's e obtendo um novo número, que está na coleção e é maior que o primeiro. Logo o maior número com algarismos não nulos na coleção deve ter todos seus algarismos iguais a 1, com exceção do algarismo das unidades, que é igual ao número de 1's que o precedem. Como o maior algarismo das unidades possível é 9, segue que o número procurado é $\underbrace{111111111}_{nove\ nº\ 1}9$.

Notamos que a coleção pode ter números arbitrariamente grandes com o algarismo 0, como (por exemplo) 101, 1001, 10001 e assim por diante.

**c)** Um número da coleção não pode ter 6 algarismos distintos, pois nesse caso a soma dos 5 algarismos à esquerda do algarismo das unidades seria no mínimo $0+1+2+3+4=10$. Por outro lado, a coleção pode ter números de 5 algarismos distintos como, por exemplo, 25108. Se um destes números tem o algarismo das unidades diferente de 9, podemos “aumentá-lo” adicionando 1 ao algarismo das unidades e 1 ao algarismo das dezenas de milhares (que, claramente, não pode ser 9), sem sair da coleção. Por exemplo, o número 43108 pode ser “aumentado” para 53109, que também está na coleção. Logo o maior número de 5 algarismos distintos na coleção deve ter 9 como algarismo das unidades. Basta agora escrever 9 como soma de que 4 parcelas distintas em ordem decrescente para “montar“ nosso número; segue imediatamente que a decomposição procurada é $9 = 6 + 2 + 1 + 0$ e obtemos o número 62109.

## QUESTÃO 4

**a)** Tio Barnabé tem que transportar uma carga total de $150 \times 60 + 100 \times 25 = 9000 + 2500 = 11500$ quilos. Como a carga máxima da caminhonete é 2000 quilos, em cinco viagens Tio Barnabé poderá transportar no máximo $5 \times 2000 = 10000$, faltando ainda $11500 - 1000 = 1500$ quilos para completar o serviço. Logo, não é possível fazer o serviço em apenas 5 viagens.

**b)** Esta questão tem duas soluções possíveis.

**Solução 1:**

Tio Barnabé pode fazer 5 viagens carregando, em cada uma, 30 sacas de arroz e 8 de milho, totalizando $30 \times 60 + 8 \times 25 = 1800 + 200 = 2000$ quilos. Em cinco viagens, ele levaria $30 \times 5 = 150$ sacas de arroz $5 \times 8 = 40$ sacas de milho, restando $100 - 40 = 60$ sacas de milho, pesando $60 \times 25 = 1500$ quilos, que poderiam ser todas transportadas na sexta viagem.

**Solução 2:**

Tio Barnabé pode fazer 5 viagens levando, em cada uma, 28 sacos de arroz e 12 de milho, totalizando $28 \times 60 + 12 \times 25 = 1980$ quilos em cada viagem; na sexta viagem ele pode levar os 10 sacos de arroz e os 40 de milho restantes, totalizando $10 \times 60 + 12 \times 25 = 1600$ quilos.

## QUESTÃO 5

**a)** Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a figura 1 pode ser pintada de $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras diferentes.

**b)** Vamos dividir as maneiras de pintar a figura 2 em dois casos.

**1º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor:**

Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

**2º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes:**

Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. No total, a figura 2 pode ser pintada de $12 + 6 = 18$ maneiras diferentes.

**c)** As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ele tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo temos $18 \times 2 = 36$ possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5.
Dividimos agora nossa contagem em dois casos:

**1º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor:**

Nesse caso, temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos $1 \times 2 = 2$ possibilidades.

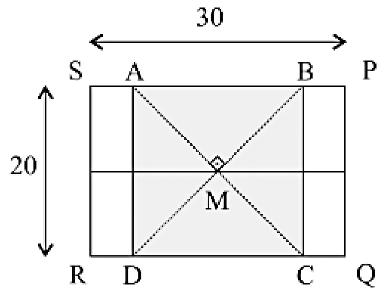
**2º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes:**

Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade.

No total, há $36 \times 2 + 36 \times 1 = 108$ maneiras diferentes de pintar a figura 3.

## QUESTÃO 6

**a)** Vamos representar a folha original pelo retângulo $PQRS$, e vamos considerar o quadrilátero $ABCD$ como na figura ao lado. A ideia é verificar que $ABCD$ é um quadrado, e podemos fazer isso de várias maneiras. Uma delas é a seguinte: $ABCD$ é um quadrilátero cujas diagonais




- são iguais, porque $AC = BD$,
- se cortam ao meio, porque se encontram no centro do retângulo e
- são perpendiculares.

Um quadrilátero com essas propriedades é necessariamente um quadrado. Como $ABCD$ é um quadrado, segue que $AB = BC = PQ = 20\ cm$.

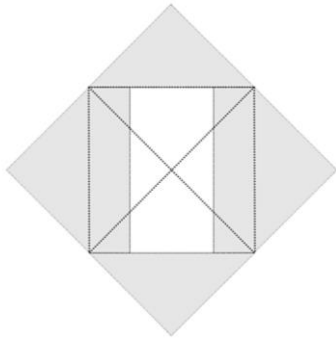
**b)** Seja $M$ o centro do quadrado. A área de cada um dos triângulos $AMB$, $BMC$, $CMD$ e $DAM$ é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ABCD$, que é $20 \times 20 = 400\ cm^2$. Logo a área de um desses retângulos é $\frac{400}{4} = 100\ cm^2$.

A folha original tem área igual a $20 \times 30 = 600\ cm^2$; se subtrairmos dessa área as áreas dos dois pedaços triangulares $ABM$ e $DMC$, restará a área dos dois pedaçoes de cinco lados. Como os dois pedaços de cinco lados são iguais, eles têm a mesma área e assim a área de cada um deles é igual a

$$\frac{600 - 2 \times 100}{2} = \frac{600 - 200}{2} = \frac{400}{2} = 200\ cm^2$$

Podemos também calcular a área de um pedaço de cinco lados de outra maneira. Cada um deles é formado por um dos quatro triângulos e por um retângulo de altura $20\ cm$ e largura igual a $\frac{30-20}{2} = \frac{10}{2} = 5\ cm$. Como a área de cada triângulo é $100\ cm^2$ e a área do retângulo é $5 \times 20 = 100\ cm^2$, concluímos que a área de cada pedaço de cinco lados é $100 + 100 = 200\ cm^2$.

**c)** O quadrado formado pelos quatro pedaços e o buraco tem área igual a 8 vezes a área de cada pedaço triangular, conforme mostrado no desenho ao lado. Portanto, sua área é igual a $8 \times 100 = 800\ cm^2$. Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, $600\ cm^2$, concluímos que a área do buraco é igual a $800 - 600 = 200\ cm^2$.



Há outras maneiras de calcular a área do buraco. Ele é um retângulo cuja altura é igual à altura da folha original, ou seja, $20\ cm$. Seu comprimento é a diferença entre o comprimento da folha original e o segmento $AB$, ou seja, $30 - 20 = 10\ cm$. Portanto, a área do buraco é $20 \times 10 = 200\ cm^2$.