Ciclo 3 – Encontro 2

PROBABILIDADE

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Probabilidade

- Texto: "Módulo Introdução à Probabilidade – O que é probabilidade? – parte 1" de Fabrício Siqueira Benevides.

Origem

Em Matemática, a Teoria das Probabilidades, ou simplesmente Probabilidade, surge como uma maneira de formalizar a noção de *chance* ou de *aleatoriedade*. Ela tem sua origem relacionada às tentativas de quantificação dos *riscos de seguros* nas sociedades antigas, e na avaliação das chances de se *ganhar* em *jogos de azar*.

Conceitos Básicos

- **Experimento aleatório** é qualquer experimento cujo resultado não se consegue prever.
- **Espaço amostral** é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Conceitos Básicos

Experimentos aleatórios:

- Lançar uma moeda e observar sua face virada para cima.
- Lançar um dado e observar sua face virada para cima.
- Sortear uma carta de baralho e observar o seu naipe.

Conceitos Básicos

Espaço amostral:

- Lançar uma moeda e observar sua face virada para cima.
  - Ω = {K,C}, utilizando K para representar 'Cara', e C representar 'Coroa'.
- Lançar um dado e observar sua face virada para cima.
  - Ω = {1,2,3,4,5,6}, para o lançamento de um dado de seis faces.
- Sortear uma carta de baralho e observar o seu naipe.
  - Ω = {Ouros, Copas, Espadas, Paus}

Conceitos Básicos

- **Evento** é um subconjunto qualquer do espaço amostral.
  - Em relação ao lançamento da moeda, o evento **'ocorrer cara'** corresponde ao conjunto {K}.
  - Em relação ao lançamento de um dado de seis faces, o evento **'ocorrer um número primo'** corresponde ao conjunto {2,3,5}.
  - Em relação ao sorteio de um a carta de baralho, o evento **'ocorrer um naipe vermelho'** corresponde ao conjunto {Ouros, Copas}.

Conceitos Básicos

- **Evento simples (ou unitário, ou elementar)** é um evento formado por um único elemento do espaço amostral.

- A **frequência relativa de um evento E** (dentro de uma série de experimentos), denotada por f_E, é o numero obtido pela divisão da quantidade de vezes em que o evento ocorre (ou seja, em que o resultado obtido pertence ao conjunto E) pelo total de vezes que o experimento foi realizado.

Conceitos Básicos

- **Frequência relativa de um evento E**

Face	Número de Ocorrências	Frequência Relativa
1	5	$f_1 = 5/50$
2	15	$f_2 = 15/50$
3	6	$f_3 = 6/50$
4	4	$f_4 = 4/50$
5	16	$f_5 = 16/50$
6	4	$f_6 = 4/50$
	Total: 50	

Claramente, para qualquer evento E o valor de f_E satisfaz $0 \leq f_E \leq 1$, uma vez que o número de vezes em que o evento ocorreu é não negativo e é no máximo igual ao número de vezes em que o experimento foi realizado.

Probabilidade

Dado o espaço amostral Ω de certo experimento aleatório, uma probabilidade é uma função que atribui a cada evento $E \subset \Omega$ um determinado valor $Pr(E)$ que satisfaz algumas condições que listaremos mais adiante.

Probabilidade

Suponha que $\Omega = \{\omega 1,...,\omega k\}$. Uma probabilidade Pr em Ω é uma função definida sobre os subconjuntos de Ω e satisfazendo as condições a seguir:

(a) $Pr(\emptyset) = 0$;

(b) $0 \leq Pr(\omega i) \leq 1$, para todo $\omega i \in \Omega$;

(c) $Pr(\omega 1) + Pr(\omega 2) + \cdots + Pr(\omega k) = 1$;

(d) para qualquer evento E, a probabilidade de E ocorrer, denotada por Pr(E), é a soma das probabilidades de seus elementos.

Probabilidade

Exemplo:

Ao lançar um dado honesto, ou seja, um em que todas as faces tem a mesma chance de serem obtidas, a probabilidade de obter cada uma das faces é igual a 1/6. Ao jogar tal dado, qual é a probabilidade de se obter um numero primo?

$$\Pr(\{2,3,5\}) = \Pr(2) + \Pr(3) + \Pr(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Espaço amostral equiprovável

Um espaço de probabilidade (finito) é equiprovável se as probabilidades dos eventos simples são todas iguais. Se o espaço amostral equiprovável Ω possui n elementos, como a soma das probabilidades dos eventos simples correspondentes deve ser igual a 1, podemos concluir que cada evento simples deve ter probabilidade igual a 1/n. Além disso, se E ⊂ Ω é um evento qualquer, denotando-se por |E| o numero de elementos de E, temos que o valor de Pr(E) é igual à soma das probabilidades dos |E| elementos que compõem E, cada uma das quais é igual a 1/n. Sendo assim:

Em um espaço equiprovável, temos:

$$\Pr(E) = \frac{|E|}{n} = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Espaço amostral equiprovável

Ao calcular a probabilidade de um evento E, é comum pensar nos elementos de E como os resultados favoráveis (para que o evento ocorra). É daí que obtemos a famosa expressão para o cálculo de probabilidades, comumente usada na escola.

$$\Pr(E) = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos possíveis}}.$$

Exercício 1

Só bala – Há 1 002 balas de banana e 1 002 balas de maçã numa caixa. Lara tira, sem olhar o sabor, duas balas da caixa. Se q é a probabilidade de as duas balas serem de sabores diferentes e p é a probabilidade de as duas balas serem do mesmo sabor, qual é o valor de $q - p$?

(a) 0 (b) $\frac{1}{2\,004}$ (c) $\frac{1}{2\,003}$ (d) $\frac{2}{2\,003}$ (e) $\frac{1}{1\,001}$

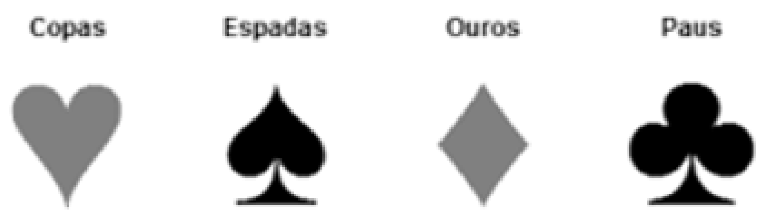
Exercício 1 - Solução

A primeira bala pode ser de qualquer sabor. Para fixar as ideias, suponhamos que seja de banana. Depois que essa bala é retirada, sobram $1\,002 + 1\,001$ balas na caixa – no nosso caso, $1\,002$ de maçã e $1\,001$ de banana. A probabilidade q de que a segunda bala seja diferente (no nosso exemplo, de maçã) é $q = 1\,002/2\,003$. A probabilidade p de que a segunda bala seja igual (no nosso exemplo, de banana) é $p = 1\,001/2\,003$. A diferença $q - p$ é, portanto,

$$q - p = \frac{1\,002}{2\,003} - \frac{1\,001}{2\,003} = \frac{1}{2\,003}\,.$$

Exercício 2

Manuel é um matemático que gosta de jogos de cartas. Ele encontra os irmãos Jonas e Jonatan durante uma viagem de ônibus e propõe um jogo. Serão usados apenas os quatro ases do baralho, o de copas e o de ouros são vermelhos enquanto o de espadas e o de paus são pretos.



Manuel será o banco e os dois irmãos, um de cada vez, apostarão 1 real contra ele em cada rodada. As cartas são postas viradas com face para baixo. Jonas escolhe uma carta e Jonatan a vira para cima. Jonas escolhe mais uma carta e Jonatan novamente a vira. Se as duas cartas tiverem a mesma cor, então Jonas ganha 1 real de Manuel. Caso contrário, Manuel ganha

Exercício 2

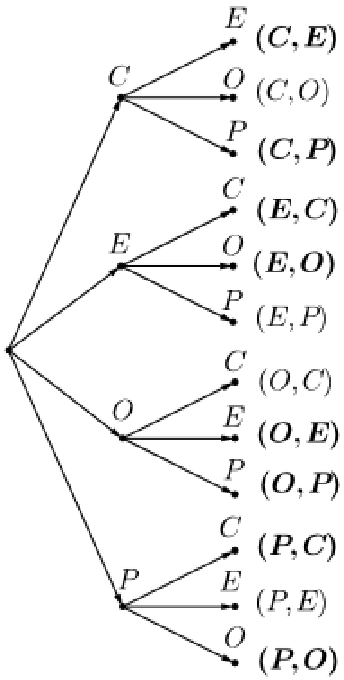
1 real de Jonas. Em seguida, Jonas e Jonatan trocam de posição e o jogo segue. Veja que Manuel não mexe nas cartas, por isto não pode manipular o jogo. Jonatan pensa um pouco e conclui que tem probabilidade de $\frac{2}{3}$ de vencer, pois os resultados são apenas duas cartas vermelhas, duas pretas ou uma vermelha e uma preta. Será mesmo?

(a) Jonas já participou de olimpíadas de matemática e decidiu tomar mais cuidado. Ele decidiu analisar este jogo usando uma árvore de possibilidades. Como ficaria a árvore de possibilidades de Jonas?

(b) Considerando os resultados da árvore do item anterior, qual a probabilidade de Manuel vencer cada rodada do jogo?

Exercício 2 - Solução

(a) Representaremos copas, espadas, ouros e paus pelas letras C, E, O e P, respectivamente. A árvore de possibilidades é mostrada na figura a seguir:



11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Exercício 2 - Solução

(b) Usando a árvore de possibilidades, há 12 resultados possíveis e em 8 deles Manuel vence. Portanto, a probabilidade de Manuel vencer cada rodada é $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. O raciocínio de Jonatan não está correto, pois as possibilidades de cores não ocorrem com a mesma probabilidade.

Vale ressaltar que este item poderia ser respondido sem a árvore de possibilidades. Considere o momento após a virada da primeira carta. Entre as outras três, duas favorecem Manuel, pois possuem a cor diferente da cor da carta que foi virada. Então, assim como na conclusão usando a árvore, a probabilidade de Manuel vencer é $\frac{2}{3}$.

Exercício 3

(FUVEST). Numa urna são depositados n etiquetas, numeradas de 1 a n. Três etiquetas são sorteadas sem repetição. Qual a probabilidade de os números sorteados serem consecutivos?

Exercício 3 - Solução

Afirmar que o sorteio é realizado sem repetição quer dizer que, uma vez que uma etiqueta seja retirada da urna, ela não é recolocada lá dentro. Desse modo, as três etiquetas sorteadas são distintas. Assim, o resultado do sorteio é um conjunto de três etiquetas, e o conjunto de possíveis resultados forma o nosso espaço amostral. Além disso, para responder à questão, a ordem em que as etiquetas foram retiradas não é importante total de casos possíveis é igual a $\binom{n}{3}$. Veja, ainda, que cada um desses casos é equiprovável, uma vez que a chance de se retirar qualquer uma das etiquetas da urna é a mesma. Dentre o total de conjuntos possíveis, devemos, agora, contar a quantidade daqueles que têm seus três elementos consecutivos.

Exercício 3 - Solução

Veja que, uma vez escolhido o menor elemento do conjunto, os outros dois estão automaticamente determinados; além disso, o menor elemento deve pertencer ao conjunto $\{1, 2, \ldots, n-2\}$. Em verdade, podemos até listar todos os subconjuntos com 3 elementos consecutivos: $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, ..., $\{n-2, n-1, n\}$.

Logo, há $n-2$ casos favoráveis, e a probabilidade desejada é igual a

$$\frac{n-2}{\binom{n}{3}} = \frac{n-2}{n(n-1)(n-2)} \cdot 3! = \frac{6}{n(n-1)}.$$

Exercício 4

No lançamento de um dado viciado de seis faces (numeradas de 1 a 6), a probabilidade de sair qualquer número é proporcional a esse número. Calcule a probabilidade de sair um número:

(a) par;

(b) maior que 4.

Exercício 4 - Solução

Solução. O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Deve existir um constante de proporcionalidade k tal que:

$$\Pr(1) = k,\ \ \Pr(2) = 2k,\ \Pr(3) = 3k$$
$$\Pr(4) = 4k,\ \Pr(5) = 5k,\ \Pr(6) = 6k.$$

Mas, como a soma das probabilidades dos eventos simples é igual a 1, devemos ter

$$k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1 \Leftrightarrow 21k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{21}.$$

Portanto, a probabilidade do número obtido no dado ser par é igual a

$$\Pr(2) + \Pr(4) + \Pr(6) = 2k + 4k + 6k = 12k = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

Por sua vez, a probabilidade do número ser maior que 4 é igual à probabilidade dele ser igual a 5 ou 6, que é

$$\Pr(5) + \Pr(6) = 5k + 6k = 11k = \frac{11}{21}.$$

Exercício 5

Palíndromos são números inteiros positivos que são lidos da mesma forma, tanto da esquerda para direita como da direita para a esquerda. Por exemplo: 8143418, 34211243, 787 e 444 são palíndromos. Qual a probabilidade de obter um numero palíndromo, sorteando-se um numero de quatro algarismos de forma equiprovável (dentre os números de quatro algarismos)?

Exercício 5 - Solução

A quantidade de números de quatro algarismos é 9.000. De fato, isso pode ser calculado pelo princípio multiplicativo: há 9 possibilidades para o algarismo das unidades de milhar e 10 para cada um dos outros, totalizando $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9.000$ possibilidades. Alternativamente, podemos observar que o menor numero de quatro algarismos é 1.000 e o maior é 9.999, de forma que a quantidade de números inteiros neste intervalo é $9.999-1.000+1 = 9.000$. Como a escolha do número de quatro algarismos é equiprovável, resta apenas calcular a quantidade deles que são palíndromos. Para determinar um palíndromo de quatro algarismos, basta escolhermos os seus dois primeiros algarismos (pois estes determinam os outros dois). Como há 9 possibilidades para o algarismos das unidades de milhar e 9 para o algarismo das centenas, temos (novamente pelo princípio multiplicativo) $9 \cdot 10 = 90$ palíndromos.

Exercício 5 - Solução

Logo a probabilidade de um dos números sorteados ser palíndromo é: $\frac{90}{9.000} = \frac{1}{100} = 1\%$.

Exercício 6

Em um programa de prêmios, o candidato tem diante de si três portas. Atrás de uma dessas portas, há um grande prêmio; atrás das demais há um bode. O candidato escolhe inicialmente uma das portas. O apresentador (que sabe qual é a porta que contém o prêmio) abre uma das portas não indicadas pelo candidato, mostrando necessariamente um bode. A seguir, ele pergunta se o candidato mantém sua escolha ou deseja trocar de porta. O candidato deve trocar ou não.

Exercício 6 - Solução

O candidato deve trocar a porta. Se ele não o faz, sua chance de vitória está em ter escolhido a porta certa da primeira vez, o que ocorre com probabilidade 1/3. Trocando a porta, ele vai ganhar o prêmio exatamente nos casos em que a porta escolhida é a errada, o que tem probabilidade 2/3.

Estudar para o próximo encontro!

Próximo encontro: 17/09, sábado, às 8h30

- **Elementos básicos de geometria plana – Parte 2**

  http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=30

(Terceira seção, "Triângulos – Propriedades básicas e alguns problemas").

- **Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales**

  http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=10

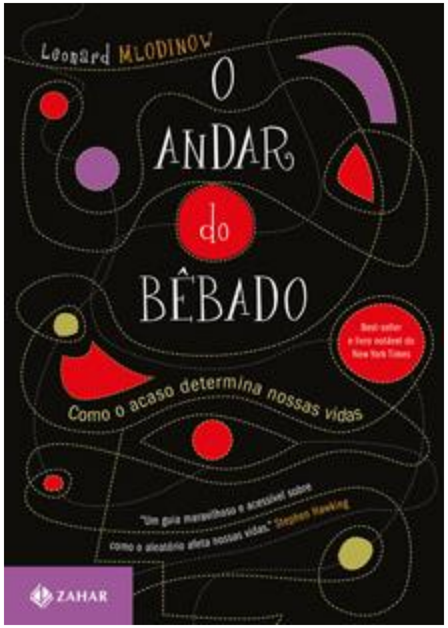
(Segunda seção, "Teorema de Tales").

EXTRA: Para explorar o assunto!

- ***Livro***

O Andar do Bêbado, de Leonard Mlodinow.

Leia um trecho: http://www.zahar.com.br/sites/default/files/arquivos/trecho_MLODINOW_OAndarDoBebado_0.pdf



- ***Filme***

Quebrando a banca, 2008.

https://filmow.com/quebrando-a-banca-t6079/

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP