Segundo Simulado – Nível 3

Aluno: João Gabriel Moura dos Santos

1)

a) Somar as somas obtidas em todas as colunas de um quadrado preenchido, é o mesmo que somar todos os números de 1 a 9; o mesmo ocorre ao somar todas as somas obtidas a partir das linhas do mesmo quadrado; com isso, ao somar ambos resultados obtemos o dobro dessa soma.

Já que a soma dos algarismos em questão é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, a soma dos valores obtidos sempre deve ser $2 \times 45 = 90$.

As somas que Gabriel já calculou são 9, 13, 14, 17 e 18; a partir disso, falta o número que somado a esse resulta em 90: $90 - 9 - 13 - 14 - 17 - 18 = 90 - 71 = 19$.

A soma que falta é 19.

b) Como disse no item anterior, somando todas as somas obtidas com as colunas do quadrado, resulta-se em 45, para somar esse valor, que é ímpar, em uma soma de três parcelas, é necessário que, no mínimo, uma delas seja ímpar, já que a soma de três valores pares é um número par.

c)

2	1	4	7
5	3	8	16
7	9	6	22
14	13	18	

2)

a) Para somar o valor 11 com os pontos que podem ser tirados, só é possível acertando um tiro no valor de 5 pontos e os outros dois no valor de 3 pontos:

$5 + 2 \times 3 = 5 + 6 = 11.$

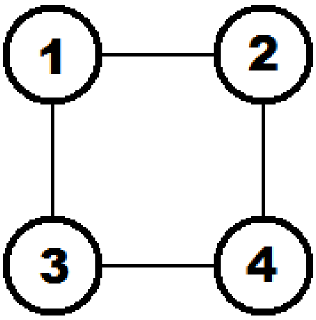
b) Sei que as respostas são 1 e 14, mas não consegui chegar numa resolução clara.

c) Em um treino de 9 rodadas, a pontuação perfeita de Michel seria 135 pontos ($9 \times (3 \times 5) = 135$) o que implica que nem todos os tiros do rapaz foram de 5 pontos; se na última Michel não marcou 15 pontos, ele tem um total de 120, faltando 14 pontos para chegar a 134, ele não pode conseguir isso em apenas uma rodada, já que é impossível obter 14 pontos com três tiros; além disso, qualquer modificação em outras pontuações de Michel resultará em, no máximo, 133 pontos na 9ª rodada, não alcançando os 134 pontos desejados.

3)

a) Para colorir a primeira bolinha, independente de qual for, Ana pode usar qualquer uma das três cores; na segunda, ela não pode repetir a já utilizada, havendo duas opções; para a última bolinha a ser pintada, Ana só terá uma cor para pintar. No total, a menina pode colorir a figura 1 de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes.

b) Vou nomear as bolinhas para explicar melhor como Ana pode pintar a figura 2:



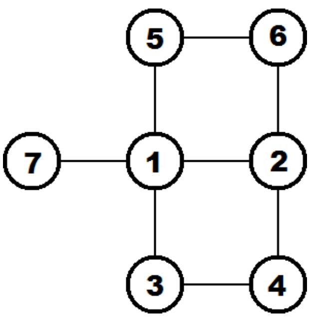
Para pintar a bolinha de número 1 Ana tem três opções de cor, quando for pintar a bolinha de número 2 tem duas opções (pois não pode repetir e de 1), a partir da número 3 há dois casos diferentes:

1º caso – se Ana escolher a única cor ainda não usada para pintar a bolinha 3, para a 4 também haverá apenas uma opção, já que não podem ser repetidas as diferentes cores de 2 e 3; com isso, há $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ modos de colorir a figura assim.

2º caso – se Ana pintar a bolinha 3 da mesma cor que a número 2, ela pode pintar a número 4 com duas cores possíveis; nesse caso, tem $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times = 12$ maneiras de pintar.

Somando os casos Ana tem, ao todo, $12 + 6 = 18$ modos de pintar a figura 2.

c) Demonstrando novamente as bolinhas que Ana irá pintar, tem-se:



Para pintar o quadrado das bolinhas 1, 2, 3 e 4, Ana tem 18 maneiras, como mostrado no item anterior, para pintar as bolinhas 5 e 6 há a ocorrência de dois casos distintos, também como no item anterior, em que quando a cor usada para 5 é a mesma utilizada em 2, há duas possibilidades de escolha para 6 e quando a cor de 5 é diferente das cores de 1 e 2 resta apenas uma possibilidade para 6; com tudo isso, pode-se dizer que para a garota pintar as seis primeiras bolinhas há $18 \times 2 + 18 \times 1 = 54$ maneiras distintas.

Por fim, para a sétima bolinha, existem duas opções de cor para cada uma das 54 maneiras, totalizando então $54 \times 2 = 108$ modos de Ana colorir a figura 3.

4)

a) Dos botões existentes na caixa, há um de cada tipo, dessa forma, dentre os brancos e quadrados, há três botões diferentes, os grandes, os médios e os pequenos. Ou seja, há três botões brancos quadrados na caixinha de costura de Lilavati.

b) Como há duas exceções para o número de botões de Lilavati e em ambas aparece o tamanho do botão, vou começar por essa diferenciação:

Pequenos – há botões pequenos de apenas um formato, quadrados, os quais podem ter três cores diferentes, pretos, brancos ou marrons; com isso, tem-se três botões pequenos, um de cada cor.

Médios – há duas formas para os botões médios, quadrados ou redondos, cada formato de botão pode ser de três cores possíveis preta, branca ou marrom; totalizando então seis diferentes botões médios (2×3).

Grandes – os botões grandes podem ser quadrados ou redondos, entre os quais há duas possíveis cores para cada formato, branca ou marrom, já que não existem botões grandes pretos; no total, são quatro botões grandes (2×2).

Na caixinha de Lilavat há 13 botões diferentes $(3 + 6 + 4 = 13)$.

5)

a) Considerando que a medida do lado do canteiro de grama seja l, sua área pode ser dada por l^2, valor que pode ser encontrado utilizando Pitágoras, já que a medida l corresponde à hipotenusa dos triângulos retângulos (canteiros de pedra) cujos catetos, nesse caso, medem $2m$ e $8m \to (10-2)$, com isso:

$$l^2 = 2^2 + 8^2 \Rightarrow l^2 = 4 + 64 \Rightarrow l^2 = 68m^2$$

A área do canteiro de grama é $68m^2$.

b) A área do canteiro sempre é dada pelo quadrado da hipotenusa dos triângulos retângulos da figura, essa hipotenusa pode ser calculada utilizando Pitágoras, já que os catetos têm medida x e $10 - x$, considerando que $f(x)$ é a área do canteiro de grama, tem-se:

$$f(x) = x^2 + (10-x)^2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 100 - 20x + x^2 \Rightarrow$$
$$f(x) = 2x^2 - 20x + 100$$

c) A área dos canteiros de pedra, no total, é dada por $20x - 2x^2$, com isso, o valor gasto nesses canteiros será de $3(20x - 2x^2) = 60x - 6x^2$; no canteiro de grama, o valor gasto será $4(2x^2 - 20x + 100) = 8x^2 - 80x + 400$.

Como o prefeito tem R$ 358,00, temos:

$$60x - 6x^2 + 8x^2 - 80x + 400 = 358$$
$$2x^2 - 20x + 42 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0$$
$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 \Rightarrow \Delta = 100 - 84 \Rightarrow \Delta = 16$$
$$x = \frac{-(-10) \pm 4}{2} \Rightarrow x = \frac{10 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 5 \pm 2$$

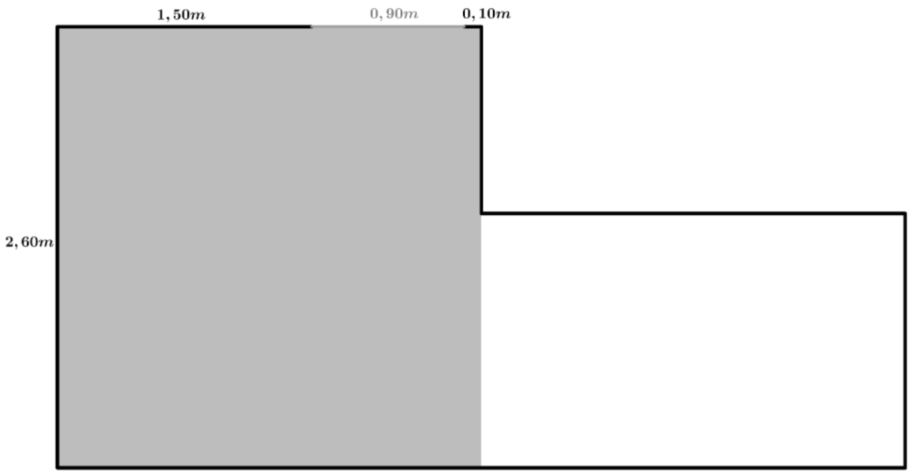
Se $x = 7$ ou $x = 3$, a área do canteiro de grama será a mesma, sendo sempre:

$f(x) = 2 \cdot 7^2 - 20 \cdot 7 + 100 \Rightarrow f(x) = 98 - 140 + 100 \Rightarrow f(x) = 58$

A maior área possível do canteiro de grama é $58m^2$.

6)

a)

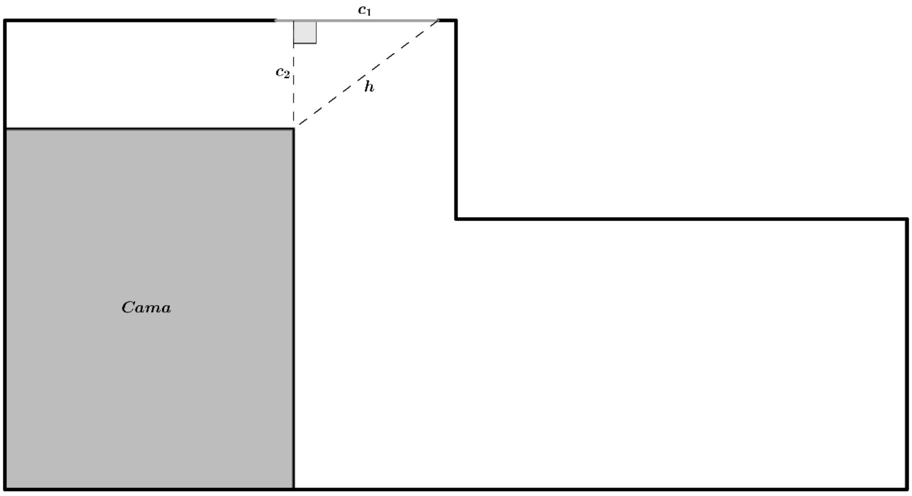


A área do chão que não é iluminada diretamente pela lâmpada é o retângulo escurecido na imagem, sua área é dada pelo seu comprimento vezes sua largura.

$$2{,}60 \times (1{,}50 + 0{,}90 + 0{,}10) = 2{,}60 \times 2{,}50 = 6{,}50m^2$$

A área do chão que não é iluminada diretamente pela lâmpada mede $6{,}50m^2$.

b)



A distância máxima que a porta deve atingir para ser barrada pelo canto da cama corresponde à hipotenusa h do triângulo retângulo indicado na figura.

Nesse triângulo, um dos catetos (c_1) é dado pela medida total do lado correspondente do quarto menos a largura da cama e os 10cm entre o canto do quarto e a dobradiça da porta:

$$c_1 = 2{,}5 - 1{,}6 - 0{,}1 = 0{,}80m$$

O outro cateto (c_2) é dado pela distância entre a cama e a parede da frente do quarto, ou seja, a diferença entre a parede de 2,60m e o comprimento da cama:

$$c_2 = 2{,}6 - 2 = 0{,}60m$$

Com isso, utilizando Pitágoras, podemos encontrar a medida h:

$$h^2 = (0{,}8)^2 + (0{,}6)^2 \Rightarrow h^2 = 0{,}64 + 0{,}36 \Rightarrow h = \sqrt{1} \Rightarrow h = 1m$$

Como a porta mede 0,90m, ela não será interrompida pela cama, ou seja, é sim possível abrir a porta sem ela encostar na cama.