**PROJETO OBMEP NA ESCOLA – 2018**

**N1 – CICLO 2 – ENCONTRO 1 - Roteiro de Estudos**

**Data 23 de março até 28 de março**

**ESCOLA MUNICIPAL PROFESSORA DANDA NUNES**

Assuntos a serem abordados:

* Contagem através de listagens e de árvores de possibilidades.
* Princípios aditivo e multiplicativo.
* Resolução de exercícios.

Videoaulas do Portal da Matemática:

2º ano do ensino médio – princípios básicos de contagem – princípio fundamental da contagem

* Princípio fundamental da contagem

<https://www.youtube.com/watch?v=ReSV1ZHR0iA>

* Exercícios sobre o princípio fundamental da contagem – parte 1

<https://www.youtube.com/watch?v=XZM5KGfyAwY>

* Exercícios sobre o princípio fundamental da contagem – parte 2

<https://www.youtube.com/watch?v=1L2W0ENxexI>

- Videoaulas no canal PICOBMEP no Youtube

Na parte de Contagem do canal picomep no Youtube, [vídeo 1](https://www.youtube.com/watch?v=6vDcJoLj9hg&list=PLrVGp617x0hC6oZt1-XeqRNT91bEYXDyb&index=1) e [vídeo 2](https://www.youtube.com/watch?v=BF2zhdBLNy4&index=2&list=PLrVGp617x0hC6oZt1-XeqRNT91bEYXDyb).

Materiais de apoio a aula disponíveis no Portal da Matemática

* 2º ano do ensino médio – princípios básicos de contagem – princípio fundamental de contagem – material teórico:

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5yr1740zquo8s.pdf>

* 2º ano do ensino médio – princípios básicos de contagem – princípio fundamental de contagem – caderno de exercícios:

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/cernvmc6v3ks4.pdf>

Referência bibliográfica importante

* Apostila 2 do PIC – [Métodos de contagem e probabilidade](http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf) – Paulo Cezar Pinto Carvalho.
* Capítulos 8 e 9 do livro: Círculos de Matemática da OBMEP – volume 1: Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra - Bruno Holanda e Emiliano A. Chagas.

1. **Introdução**

No capítulo 1 da apostila 2 do PIC ``métodos de contagem e probabilidade'' são apresentadas várias sugestões de como raciocinar sobre problemas de contagem. Para a preparação deste encontro, sugerimos o estudo desta apostila. Mais ainda, nos capítulos 8 e 9 do livro “círculos matemáticos da OBMEP”, volume 1, são apresentados vários exercícios e exemplos resolvidos. O estudo desses capítulos também é importante para a preparação deste encontro.

Diferentemente dos roteiros já disponibilizados, neste, além da lista de exercícios para serem trabalhados em sala de aula, também vamos apresentar alguns exemplos resolvidos para ilustrar a metodologia que está sendo apresentada para a solução de problemas de contagem. Os Professores e os Coordenadores devem pensar na melhor estratégia para utilizar esses exemplos.

1. **O Princípio Aditivo**

Neste encontro pretendemos ensinar estratégias para a resolução de problemas de contagem através da análise do problema, da organização e do uso de raciocínios simples e não vamos deduzir nem utilizar fórmulas prontas que exigem memorização e ainda podem ser utilizadas em situações equivocadas. Os principais resultados que serão utilizados nas soluções dos problemas de contagem são o princípio aditivo e o princípio multiplicativo.

O princípio aditivo é utilizado cotidianamente quando fazemos uma contagem e a separamos em casos. Por exemplo, para contar quantos são os alunos que estão em uma sala de aula, podemos contar os meninos e podemos contar as meninas. O número de alunos na sala será a soma da quantidade de meninos e de meninas. Do mesmo modo, se temos uma pilha de cartas de baralho e queremos contar essas cartas, podemos separar por nipe (paus, copas, espadas e ouros) e depois podemos somar as quantidades de cartas de cada nipe.

Para que esta contagem separada em casos esteja correta é necessário que:

* os casos cubram todas as possibilidades, ou seja, não se pode esquecer de contar nada que deveria ser contado.
* os casos devem ser disjuntos, ou seja, nada pode ser contado mais de uma vez.

Traduzindo estas condições para uma linguagem mais formal, o que está sendo dito é o seguinte: se temos um conjunto escrito como uma união de dois subconjuntos disjuntos, então a quantidade de elementos do conjunto dado é a soma das quantidades de elementos desses dois subconjuntos.

*Princípio Aditivo.* Sejam  e  conjuntos disjuntos, isto é, conjuntos com interseção vazia. Se possui *m* elementos e se possui *n* elementos, então a união  possui *m+n* elementos.

Por exemplo, se desejamos contar quantos são os alunos em uma sala de aula, vamos representar por  o conjunto dos meninos e vamos representar por  o conjunto das meninas desta sala. É evidente que a sala de aula é a união . Como a interseção  é vazia, então a quantidade de elementos em  é igual à soma da quantidade de elementos em  com a quantidade de elementos em . Ou seja, é a quantidade de meninos mais a quantidade de meninas.

**Exemplo 1.** Quantos são os números inteiros entre 1 e 20 que são múltiplos de 3 ou múltiplos de 7?

Solução. Existem 6 múltiplos de 3 entre 1 e 20, a saber {3, 6, 9, 12, 15, 18} e existem 2 múltiplos de 7 neste conjunto, a saber {7, 14}. Como esses conjuntos são disjuntos, então existem 6+2=8 múltiplos de 3 ou de 7 entre 1 e 20.

**Exemplo 2.** Em uma escola, 153 alunos estudam pela manhã, outros 92 estudam a tarde e outros 136 estudam a noite. Quantos alunos desta escola estudam pela manhã ou à noite?

Solução. Pela manhã estudam 153 alunos e a noite estudam 136 alunos. Como são alunos diferentes, o total de alunos que estudam de manhã ou a noite é igual a 153+136=289.

De outro modo o princípio aditivo também pode ser enunciado do seguinte modo.

*Princípio Aditivo.* Suponha que um evento *X* possa ocorrer de *x* maneiras possíveis e que um evento distinto *Y* possa ocorrer de *y* maneiras possíveis.

Então *X* ou *Y* pode ocorrer de *x+y* maneiras diferentes.

O princípio aditivo enunciado logo acima pode ser generalizado para situações em que um conjunto está escrito como a união de mais de dois subconjuntos disjuntos. Por exemplo, esta pode ser a situação de uma pilha de cartas de um baralho. Podemos chamar de  o conjunto das cartas de paus, de  o conjunto das cartas de copas, de  o conjunto das cartas de espadas e de  o conjunto das cartas de ouros. Cada carta da pilha está em um desses conjuntos. Logo se contamos os elementos de , ,  e  não esquecemos de contar nenhuma carta. Isto significa que a pilha de cartas é a união . E como uma carta possui um único nipe, ou seja, como , se contamos os elementos de , ,  e  então contamos cada carta uma única vez. Deste modo, a quantidade de cartas na pilha é a soma das quantidades de elementos dos conjuntos , ,  e .

**Exemplo 3.** Maria é muito indecisa. Ela pretende sair com suas amigas e está pensando em qual roupa vestir. Ela pode combinar três blusas diferentes com duas saias diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir?

Solução. Sejam B1, B2 e B3 as blusas de Maria. Agora vamos representar por ,  e  os conjuntos das maneiras de Maria se vestir, respectivamente, com as blusas B1, B2 e B3. Cada um desses conjuntos possui dois elementos, pois cada blusa pode ser combinada com as duas saias. A união  contém todas as maneiras de Maria combinar uma blusa com uma saia. Como os conjuntos ,  e  não possuem interseção, então o conjunto  possui 2+2+2=6 elementos. Veremos na próxima seção que esta solução está muito próxima do princípio multiplicativo.

1. **Princípio Multiplicativo**

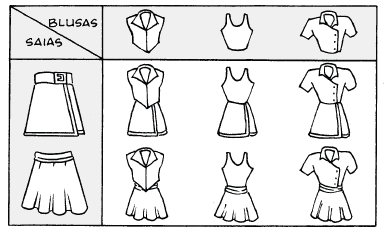
Antes de apresentar formalmente o princípio multiplicativo, vamos explorar alguns exemplos. Nas soluções destes primeiros exemplos sugerimos que sejam listadas todas as possibilidades e que a contagem final seja relacionada com uma multiplicação. Esperamos que esta atitude ajude no entendimento do princípio multiplicativo.

**Exemplo 4.** Maria é muito indecisa. Ela pretende sair com suas amigas e está pensando em qual roupa vestir. Ela pode combinar três blusas diferentes com duas saias diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir?

Solução: Vamos representar por S1 e S2 as duas saias de Maria. Podemos listar todas as combinações possíveis.

* Se ela escolheu a saia S1, então ela pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.
* De modo análogo, se ela escolheu a saia S2, ela também pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.

Então, pelo princípio aditivo, ao todo ela pode se vestir de 3+3=6 modos diferentes. Veja estas possibilidades na figura a seguir.



Comentário: A resposta 3+3=6 também pode ser escrita como . Neste caso podemos raciocinar assim. Para a escolha da saia temos 2 possibilidades. Uma vez escolhida a saia, temos 3 blusas para escolher. Então ao todo temos , pois temos uma soma de duas parcelas iguais a três.

**Exemplo 5.** Quantos são os números de dois algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4?

Solução: Para resolver este problema podemos listar todas as possibilidades.

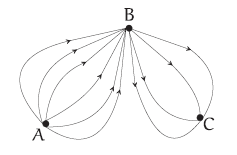
* Se o número começa com o algarismo 1 temos: 12, 13 e 14. São três possibilidades.
* Se o número começa com o algarismo 2 temos: 21, 23 e 24. São três possibilidades.
* Se o número começa com o algarismo 3 temos: 31, 32 e 34. São três possibilidades.
* Se o número começa com o algarismo 4 temos: 41, 42 e 43. São três possibilidades.

Então ao todo temos 3+3+3+3=12 números possíveis.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 |  | 12 | 13 | 14 |
| 2 | 21 |  | 23 | 24 |
| 3 | 31 | 32 |  | 34 |
| 4 | 41 | 42 | 43 |  |

Comentário: Do jeito como a solução foi organizada, a contagem de todas estas possibilidades também pode ser pensada assim. Para a escolha do primeiro algarismo temos 4 possibilidade (são as quatro linhas da tabela). Uma vez escolhido este primeiro algarismo, sobram 3 possibilidades para a escolha do algarismo seguinte (são os números coloridos das três colunas em cada linha). Daí o total de possibilidades é igual ao produto pois temos uma soma de quatro parcelas iguais a três.

**Exemplo 6.** (Fomin, capítulo 2) No País das Maravilhas existem três cidades A, B e C. Existem seis estradas ligando A a B e quatro estradas ligando B a C. De quantas maneiras é possível dirigir de A a C?



Solução. Vamos numerar as cidades de A até B com os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Vamos numerar as cidade de B até C também com números 1, 2, 3 e 4. E vamos representar um caminho de A até C como, por exemplo assim 5-3 em que pegamos a estrada 5 para ir de A até B e pegamos a estrada 3 para ir de B até C.

* Se a primeira estrada é a 1, então podemos fazer quatro percursos diferentes:  
  1-1, 1-2, 1-3, 1-4.
* Se a primeira estrada é a 2, então também podemos fazer quatro percursos diferentes: 2-1, 2-2, 2-3, 2-4.
* De modo análogo se a primeira estrada é a 3, então também podemos fazer quatro percursos diferentes: 3-1, 3-2, 3-3, 3-4.

Então para cada escolha da estrada de A até B, podemos fazer quatro percursos diferentes para sair de A e chegar até C. Como temos 6 escolhas de estradas de A até B, o número total de percursos de A até C é igual a 4+4+4+4+4+4=6x4=24.

As resoluções destes três primeiros exemplos são aplicações do princípio multiplicativo, que nada mais é do que a interpretação de multiplicação de números inteiros como uma maneira resumida de escrever uma soma de parcelas iguais.

**Princípio Multiplicativo:** Se uma decisão D1 pode ser tomada de  modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D2 pode ser tomada de  modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D1 e D2 é igual ao produto .

**Exemplo 7.** Em uma sala estão 2 meninos e 3 meninas. De quantos modos diferentes podemos formar um par menino-menina para uma dança?

Solução. O menino pode ser escolhido de 2 modos diferentes e em seguida a menina pode ser escolhida de 3 modos diferentes. Daí o casal pode ser formado de  maneiras diferentes. (solução idêntica a do exemplo 4)

**Exemplo 8.** Quantos são os números de dois algarismos distintos?

Solução. O algarismo da dezena pode ser escolhido de 9 maneiras diferentes (pois ele não pode ser igual a zero). Depois de escolhido o algarismo da dezena, o algarismo da unidade pode ser escolhido de 9 maneiras diferentes (pois ele não pode ser igual ao algarismo da dezena). Portanto existem, 9x9=81 números de dois algarismos distintos. Observe que esses números podem ser representados em uma tabela com 9 linhas (algarismo da dezena) e com 10 colunas (algarismo da unidade), com uma diagonal apagara, correspondente aos números com dois algarismos iguais. Esta tabela possui 9x10-9=90-9=81 números com dois algarismos distintos.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 10 |  | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 2 | 20 | 21 |  | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 3 | 30 | 31 | 32 |  | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 4 | 40 | 41 | 42 | 43 |  | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
| 5 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 |  | 56 | 57 | 58 | 59 |
| 6 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 |  | 67 | 68 | 69 |
| 7 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 |  | 78 | 79 |
| 8 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 |  | 89 |
| 9 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 |  |

**Exemplo 9.** Quantos são os números pares de dois algarismos distintos?

Solução 1. Existem 9 números pares de dois algarismos terminados em zero. Agora se o número não termina em zero, então ele deve terminar com 2, 4, 6, 8. Desse modo existem 4 possibilidades para a escolha do algarismo da unidade. Depois de escolhido o algarismo da unidade, o algarismo da dezena pode ser escolhido de 8 maneiras diferentes (devemos excluir o zero e o algarismo que já foi escolhido na unidade). Então existem 8x4=32 números pares de dois algarismos distintos terminados com 2, 4, 6 ou 8. Somando com os 9 que terminam com zero, obtemos um total de 32+9=41 números.

Solução 2. De outro modo, uma estratégia bastante comum utiliza em problemas de contagem é contar com excesso e depois subtrair desta contagem os casos não desejados. Neste exercício podemos contar quantos são os números pares de dois algarismos e, em seguida, subtrair a quantidade de números pares com dois algarismos iguais. Existem 45=9x5 números pares de dois algarismos (9 dígitos para a casa da dezena e 5 dígitos para a casa da unidade). Desses 45 números devemos desconsiderar os números 22, 44, 66 e 88 que possuem algarismos iguais. Portanto existem 45-4=41 números pares com dois algarismos distintos.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 1 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 2 | 20 |  | 24 | 26 | 28 |
| 3 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 |
| 4 | 40 | 42 |  | 46 | 48 |
| 5 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 |
| 6 | 60 | 62 | 64 |  | 68 |
| 7 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 |
| 8 | 80 | 82 | 84 | 86 |  |
| 9 | 90 | 92 | 94 | 96 | 98 |

Nas soluções de muitos problemas de contagem pode ser necessário o uso tanto do princípio multiplicativo quanto do princípio aditivo, como ilustra o próximo exemplo.

**Exemplo 10.** Suponha que temos uma coleção com 5 livros de álgebra, 7 livros de combinatória e 10 livros de geometria. Se todos os livros são diferentes, de quantas maneiras podemos selecionar dois livros de assuntos diferentes?

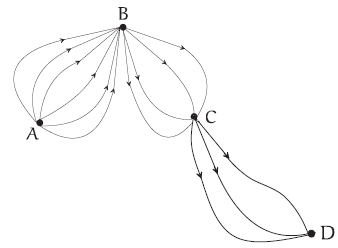
Solução. Primeiramente observe que existem três possibilidades de escolhas de dois dos três assuntos: álgebra-combinatória ou álgebra-geometria ou combinatória-geometria. Então vamos contar quantas são as escolhas em cada um desses casos:

* Álgebra-combinatória: 5x7=35
* Álgebra-geometria: 5x10=50
* Combinatória-geometria: 7x10=70

Ao todo vemos que existem 35+50+70=155 escolhas diferentes.

O princípio multiplicativo pode ser generalizado para uma situação em que mais de duas decisões devem ser tomadas. Se escolhas diferentes de uma decisão não modificar a quantidade de escolhas de uma outra decisão, então para saber o número total de possibilidades basta multiplicar o número de escolhas de cada uma das decisões.

**Exemplo 11.** Existem 6 estradas ligando as cidades A e B; existem 4 estradas ligando as cidades B e C; existem 3 estradas ligando as cidades C e D. De quantas maneiras é possível dirigir de A até D?

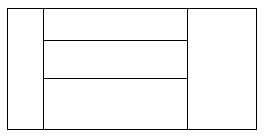


Solução: Para o trecho AB podemos escolher uma entre 6 estradas disponíveis. Uma vez escolhida esta estrada, para o trecho BC, temos 4 escolhas. Depois de escolhida esta estrada, temos 3 possibilidades para o trecho CD. Portanto temos  modos diferentes de dirigir de A até D.

**Exemplo 12.** Quantos são os números naturais de três algarismos distintos?

Solução: Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a zero. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois ele não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo. A resposta é .

**Exemplo 13.** O retângulo a seguir está dividido em 5 regiões. Se temos 5 cores a nossa disposição, de quantas maneiras podemos colorir este retângulo de modo que cada região receba uma cor e regiões adjacentes sejam coloridas com cores diferentes?



Solução: Devemos considerar dois casos, analisando separadamente se as regiões da esquerda e da direita são coloridas da mesma cor ou com cores diferentes. Suponhamos então que as regiões da esquerda e da direta são coloridas com a mesma cor. Neste caso:

* A região da esquerda pode ser colorida com 5 cores.
* A região da direita pode ser colorida de uma única cor: a mesma cor da região da esquerda.
* A faixa horizontal de cima pode ser colorida com 4 cores, pois não podemos repetir a cor das regiões laterais.
* A faixa horizontal do meio pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
* A faixa horizontal de baixo também pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos  possibilidades.

Suponhamos agora que as regiões da esquerda e da direta são coloridas com cores diferentes. Neste caso:

* Existem 5 opções de cores para a região da esquerda.
* Em seguida existem 4 opções de cores para a região da direita, pois ela deve ser colorida com uma cor diferente da região da esquerda.
* Daí podemos colorir a faixa horizontal de cima com 3 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais.
* Em seguida podemos colorir a faixa horizontal do meio com 2 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
* Finalmente a faixa horizontal de baixo também pode ser colorida com 2 cores pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos  possibilidades. Somando, concluímos que o retângulo pode ser colorido de  maneiras diferentes.

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA 2018 – N1 – ciclo 2 – Encontro 1 **ENUNCIADOS**

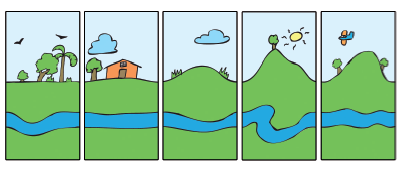
**Exercício 1.** Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernado, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate.

1. Faça uma lista de todas as possíveis escolhas.
2. Conte o número de possíveis escolhas e verifique que o Princípio Multiplicativo fornece a resposta correta.

**Exercício 2.** Um time de futebol de campo com 11 jogadores precisa eleger um capitão e um vice-capitão.

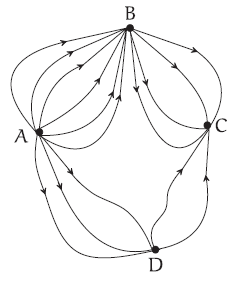
1. De quantas maneiras esta escolha pode ser feita?
2. Neste caso é viável listar todas estas possibilidades?

**Exercício 3.** (OBMEP 2011 - N2Q13 – 1ª fase) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?



1. uma semana
2. um mês
3. dois meses
4. quatro meses
5. seis meses

**Exercício 4.** A figura a seguir ilustra o mapa das estradas ligando 4 cidades. De quantas maneiras é possível dirigir de A a C?

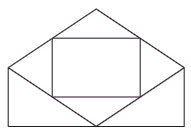


**Exercício 5.** Quantos são os anagramas da palavra **MALUCO** em que entre duas vogais existe uma consoante e entre duas consoantes existe uma vogal?

**Exercício 6.** De quantas maneiras podemos colocar dois carros diferentes em duas das seis vagas de um estacionamento?

**Exercício 7.** (OBMEP 2006 - N1Q7 – 1ª fase) Dois casais estão sentados em um banco de um parque, posando para uma fotografia. De quantas maneiras diferentes essas quatro pessoas podem se sentar de modo que cada marido apareça ao lado de sua esposa na fotografia?

**Exercício 8.** (OBMEP 2013 - N2Q19 – 1ª fase) De quantas maneiras diferentes é possível pintar a figura, de modo que cada uma das regiões seja pintada com uma das cores azul, verde ou preto e que regiões cujas bordas possuem um segmento em comum não sejam pintadas com a mesma cor?

1. 68
2. 96
3. 108
4. 120
5. 150

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA 2018 – N1 – ciclo 2 – Encontro 1 **SOLUÇÕES e COMENTÁRIOS**

**Solução do exercício 1.** (apostila 2, exercício 1, página 11)

**Solução do exercício 3.**

**Solução do exercício 4.** (Fomin, capítulo 2)

**Solução do exercício 6.**

**Solução do exercício 7.** (OBMEP 2006 - N1Q7 – 1ª fase)

**Solução do exercício 8.** (OBMEP 2013 - N2Q19 – 1ª fase)

**PROJETO OBMEP NA ESCOLA – 2018**

**N1 – CICLO 2 – ENCONTRO 2 - Roteiro de Estudos**

**Data 02 de ABRIL até 06 de ABRIL**

**ESCOLA MUNICIPAL PROFESSORA DANDA NUNES**

**Assunto:** resolução de exercícios de contagem.

**Material:** esta lista de exercícios que foi elaborada com questões de provas anteriores da OBMEP.

O objetivo deste encontro é utilizar os estudos realizados no encontro anterior na resolução de questões de provas anteriores da OBMEP. Deste modo, todas as questões sugeridas para este encontro já estiveram em alguma prova da OBMEP.

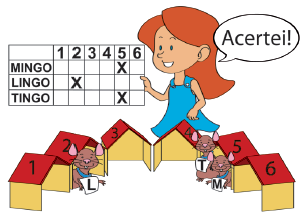
Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA 2018 – N1 – ciclo 2 – Encontro 2 **ENUNCIADOS**

**Exercício 1. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2017 – Nível 1 – Questão 17)** Após digitar um número de seis algarismos em sua calculadora, Cecília observou que dois algarismos 9 que ela havia digitado não apareceram no visor; o que apareceu foi 2017. Quantas são as possibilidades para o número que ela digitou?

**Exercício 2. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2005 – Nível 1 – Questão 9)** O Campeonato Brasileiro de Futebol de 2005 foi disputado por 22 times. Cada time enfrenta cada um dos outros duas vezes, uma vez em seu campo e outra no campo do adversário. Quantas partidas serão disputadas por cada time?

**Exercício 3.** **(Prova da 1ª fase da OBMEP 2008 – Nível 1 – Questão 18)** Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?

**Exercício 4. (Prova 2ª fase da OBMEP 2011 – Nível 1 – Questão 4)** Cristina gosta de adivinhar em quais casinhas seus ratinhos Mingo, Lingo e Tingo irão se esconder, após ser aberta a gaiola em que eles moram. As casinhas são numeradas de 1 a 6 e dois ou mais ratinhos podem se esconder na mesma casinha. Ela registra suas previsões em cartões como os da figura, marcando um X em cada linha.

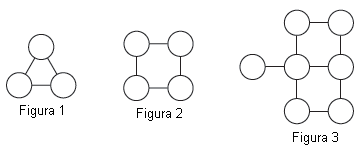


1. De quantas maneiras Cristina pode preencher um cartão?
2. De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que os ratinhos se esconderão em três casinhas diferentes?
3. De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente?

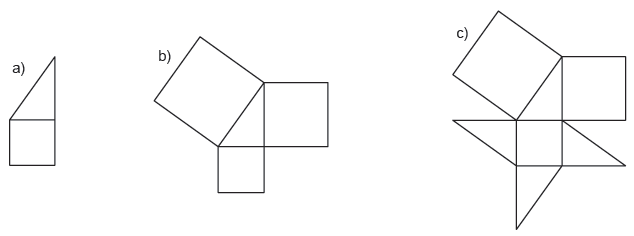
**Exercício 5. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2005 – Nível 1 – Questão 15)** Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

**Exercício 6. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2012 – Nível 2 – Questão 16)** Quantos são os números naturais entre 0 e 999 nos quais aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3?

**Exercício 7. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2009 – Nível 1 – Questão 5)** Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul, preto ou vermelho de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir cada uma destas figuras?



**Exercício 8. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2011 – Nível 2 – Questão 5)** João vai pintar figuras compostas por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor. Determine de quantas maneiras João pode pintar cada uma das seguintes figuras.

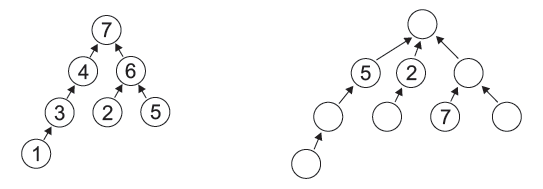


**Exercício 9. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2012 – Nível 2 – Questão 5)** Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura a seguir, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

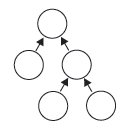


1. Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de 3x2x2 maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?
2. De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?
3. De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?
4. Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

**Exercício 10. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2008 – Nível 1 – Questão 5)** Os círculos da figura abaixo a esquerda foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi bem preenchida.



1. Complete a figura acima a direita com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.
2. De quantas maneiras a figura a seguir a esquerda pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?
3. De quantas maneiras a figura a seguir a direita pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?

**Exercício 11. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2014 – Nível 2 – Questão 18)** O número 2014 tem quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0. Quantos números possuem exatamente essas características?

**Exercício 12. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2012 – Nível 1 – Questão 5)** Vítor tem 24 cartões, sendo oito azuis, oito brancos e oito verdes. Para cada cor, ele numerou os cartões de 1 a 8.

1. De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões azuis de modo que a soma de seus números seja igual a 9?
2. De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?
3. De quantas maneiras Vítor pode escolher 3 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

**Exercício 13. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2016 – Nível 2 – Questão 5)** Fernanda precisa criar uma senha para poder usar o computador da escola. A senha deve ter cinco algarismos distintos de modo que, da esquerda para a direita, o algarismo da 1ª posição seja maior do que 1, o da 2ª posição seja maior do que 2, e assim por diante. Por exemplo, 25476 é uma senha possível, mas 52476 não é, pois o algarismo na segunda posição não é maior do que 2.

1. Se a senha de Fernanda começar com 9467, qual deve ser o algarismo da 5ª posição?
2. Se Fernanda começar a formar sua senha escolhendo o algarismo 7 para a 5ª posição, quantas são as possibilidades de escolha para a 4.ª posição?
3. Quantas senhas Fernanda poderá formar?

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA 2018 – N1 – ciclo 2 – Encontro 2 **SOLUÇÕES e COMENTÁRIOS**

**Solução do exercício 1.** **(Prova da 1ª fase da OBMEP 2017 – Nível 1 – Questão 17)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2017.pdf>

**Solução do exercício 2.** **(Prova da 1ª fase da OBMEP 2005 – Nível 1 – Questão 9)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2005.pdf>

**Solução do exercício 3.** **(Prova da 1ª fase da OBMEP 2008 – Nível 1 – Questão 18)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2008.pdf>

**Solução do exercício 4. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2011 – Nível 1 – Questão 4)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n1-2011.pdf>

**Solução do exercício 5. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2005 – Nível 1 – Questão 15)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2005.pdf>

**Solução do exercício 6. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2012 – Nível 2 – Questão 16)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2012.pdf>

**Solução do exercício 7. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2009 – Nível 1 – Questão 5)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n1-2009.pdf>

**Solução do exercício 8. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2011 – Nível 2 – Questão 5)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n2-2011.pdf>

**Solução do exercício 9. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2012 – Nível 2 – Questão 5)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n2-2012.pdf>

**Solução do exercício 10. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2008 – Nível 1 – Questão 5)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n1-2008.pdf>

**Solução do exercício 11. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2014 – Nível 2 – Questão 18)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2014.pdf>

**Solução do exercício 12. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2012 – Nível 1 – Questão 5)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n1-2012.pdf>

**Solução do exercício 13. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2016 – Nível 2 – Questão 5)**

<http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n2-2016.pdf>