

Programa de Formação dos Professores Habilitados e dos Alunos de Licenciatura

OBMEP na Escola e PIC 2016

Grupo N2 – Ciclo 5

1ª semana: quinto encontro de formação entre professores, alunos de licenciatura e coordenador.

- Assuntos a serem abordados:

Aritmética 5: Fenômenos periódicos (padrões).

Contagem 5: Permutações com repetições e circulares.

Geometria 5: Paralelismo: quadriláteros notáveis.

- Material a ser estudado pelo professor:

Seguindo as mesmas orientações anteriores, entendemos que os textos e videoaulas sugeridos a seguir devem ser abordados integralmente pelo Coordenador e seus Colaboradores (professores ou alunos de graduação). Esses materiais são balizadores para a preparação das aulas e para a elaboração das discussões técnicas envolvendo os professores habilitados ou alunos de graduação, quando de suas atuações frente aos seus alunos.

Aritmética 5:

- Textos:

1. Seções 2.2 e 2.3 da Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, L. Cadar. e F. Dutenhefner. (<http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf>)

2. Seção 3.4 da Apostila 1 da OBMEP, “Iniciação à Aritmética”, A. Hefez. (<http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf>)

3. [Banco de Questões da OBMEP](#), números diversos.

4. Capítulo 3, Divisibilidade e Resto, seções 2 e 3, do livro Círculos Matemáticos – A Experiência Russa – D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg.

5. Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko.

6. [Provas da OBMEP](#).

- Vídeos:

1. Para acessar os vídeos relacionados com os Fenômenos Periódicos (Padrões), acesse o módulo [Aritmética dos Restos](#), no Portal da Matemática, e assista os seguintes vídeos:

- Propriedades Aritméticas dos Restos;
- Problemas com calendários;
- Qual é o resto da divisão de 2^{56} por 7? E por 11?

Contagem 5:

-Textos:

1. Capítulo 4 da Apostila do PIC da OBMEP “Métodos de Contagem e Probabilidade”, Paulo Cezar Pinto Carvalho (direcionar o estudo apenas para permutações com repetições e circulares).

<http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf>

2. Material Teórico do Portal da Matemática “Permutações com elementos repetidos”, 2º Ano – Módulo de Princípios Básicos de Contagem.

Autor: Prof. Angelo Papa Neto; Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto.

http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/cb4c5cmdhggko.pdf

3. Material Teórico do Portal da Matemática “Permutação circular”, 2º Ano – Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem.

Autor: Prof. Angelo Papa Neto; Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto.

http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/2242r0gioudc4.pdf

4. [Banco de Questões da OBMEP](#), números diversos.

5. Capítulo 2 do livro Círculos Matemáticos – A Experiência Russa – D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg (direcionar o estudo apenas para permutações com repetições e circulares).

6. Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko.

7. [Provas da OBMEP](#).

-Vídeos:

1. [Portal da Matemática](#): 2º Ano do Ensino Médio – [Módulo de Princípios Básicos de Contagem](#).

Videoaulas:

- Permutação com Repetição;
- Exercícios de Permutação com Repetição.

2. Portal da Matemática: 2º Ano do Ensino Médio – Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem.

Videoaulas:

- Permutação Circular;
- Exercícios sobre Permutação Circular – parte 1;
- Exercícios sobre Permutação Circular – parte 2;
- Exercícios sobre Permutação Circular – parte 3;
- Exercícios sobre Permutação Circular – parte 4.

Geometria 5:

- Textos:

1. Seções 5.4 e 6.1 da Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Geometria – Parte 1”, L. Cadar e F. Dutenhefner.

<http://www.obmep.org.br/docs/Geometria.pdf>

2. Portal da Matemática: 8º Ano do Ensino Fundamental – Elementos Básicos de Geometria - Parte 2: Material Teórico – “Retas Cortadas Por Transversal”.

http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/hakpy4i2obw4g.pdf

3. Banco de Questões da OBMEP, números diversos.

4. Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko.

5. Provas da OBMEP.

- Vídeos:

1. Portal da Matemática: 8º Ano do Ensino Fundamental – Elementos Básicos de Geometria Parte 2

Videoaulas:

- Atravessando um rio... retas cortadas por uma transversal;
- Resolvendo o problema do rio;
- Teorema dos bicos.

2. Portal da Matemática: 8º Ano do Ensino Fundamental – Elementos Básicos de Geometria Parte 3

Videoaulas:

- Quadriláteros;
- Paralelogramos: Definição e equivalências;
- Uma aplicação de propriedades de paralelogramos;
- Sobre o encontro das medianas de um triângulo;
- Trapézios;
- Problemas com paralelogramos;
- Paralelogramos especiais;
- Dois problemas sobre quadriláteros.

2ª semana: encontro entre professores e alunos

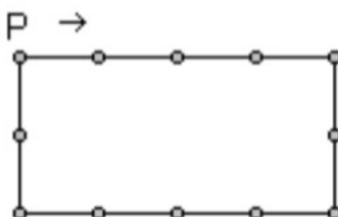
Assunto a ser abordado: **Aritmética 5** – Fenômenos periódicos (padrões)

Estudos a serem desenvolvidos com os alunos: antes da realização do encontro, é importante que o professor tenha lido os materiais impressos, englobando aspectos teóricos e exercícios, bem como tenha assistido a todos os vídeos anteriormente indicados. Incentive os seus alunos a fazerem o mesmo. Inicialmente o professor deverá recordar aspectos conceituais associados ao Algoritmo da Divisão (veja, por exemplo, seção 2.1 da Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, L. Cadar. e F. Dutenhefner ou seção 3.4 da Apostila 1 da OBMEP, “Iniciação à Aritmética”, A. Hefez). Em um segundo momento, o tema Fenômenos Periódicos deverá ser trabalhado com os alunos, via a metodologia da resolução de problemas, explorando a seção 2.2 da Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, L. Cadar. e F. Dutenhefner. De uma forma complementar, os problemas 29, 32, 33 e 34 da página 29, do Capítulo 3 - Divisibilidade e Resto, do livro Círculos Matemáticos – A Experiência Russa, bem como os problemas 7.4 e CI.14 presentes nas páginas 15 e 30, respectivamente, do livro Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko, podem ser considerados quando dos estudos à serem realizados com os alunos.

Exercícios a serem discutidos com os alunos: deverão ser abordados de 6 a 8 problemas durante o encontro presencial. Esse número poderá ser ampliado caso o professor considere viável. Esses problemas devem estar relacionados com o tema Fenômenos Periódicos e surgem como consequência do Algoritmo da Divisão. É importante que os estudos presenciais estejam em conformidade com os textos ou videoaulas de aritmética que foram descritos acima. Para auxiliar o trabalho, iremos indicar quatro problemas a serem discutidos e convidamos o professor a selecionar o restante:

(I) Exercício 6, página 32, Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, L. Cadar. e F. Dutenhefner.

Pedro caminha ao redor de uma praça retangular onde estão dispostas 12 árvores, brincando de tocar cada árvore durante seu passeio. Se no início ele toca árvore indicada na figura que segue, e se ele anda no sentido da seta, indique que árvore ele estará tocando ao encostar em uma árvore pela centésima vez.



Solução: A resposta encontra-se na página 32, Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, L. Cadar. e F. Dutenhefner.

(II) Exercício 10, página 34, Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, L. Cadar. e F. Dutenhefner.

O ano de 2014 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?

Solução: A resposta encontra-se na página 34, Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, L. Cadar. e F. Dutenhefner.

(III) Exercício 13, página 35, Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, L. Cadar. e F. Dutenhefner.

Qual é o resto da divisão de 2^{56} por 7? E por 11?

Solução: A resposta encontra-se no vídeo intitulado Qual é o resto da divisão de 2^{56} por 7? E por 11?, presente no módulo [Aritmética dos Restos](#), no Portal da Matemática.

(IV) Problema 28, página 29, Círculos Matemáticos – A Experiência Russa – D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg.

Encontre o último algarismo do número 1989^{1989} .

Solução: A resposta encontra-se na mesma página do referido texto.

3ª Semana: encontro entre professores e alunos.

-Assunto a ser abordado: **Contagem 5** - Permutações com repetições e circulares.

Estudos a serem desenvolvidos com os alunos: antes da realização do encontro, é importante que o professor tenha lido os materiais impressos, englobando aspectos teóricos e exercícios, bem como tenha assistido a todos os vídeos anteriormente indicados. Incentive os seus alunos a fazerem o mesmo. Vale ressaltar que a Apostila “Métodos de Contagem e Probabilidade” já foi utilizada nos ciclos anteriores e nela foram apresentados os aspectos teóricos associados aos princípios de contagem, permutação e combinação simples. O nosso foco de interesse nesse ciclo é direcionar o aluno para o estudo de permutações com repetições e circulares, esses novos conceitos também estão agregados aos princípios básicos de contagem. As referências teóricas 2 e 3 acima citadas podem auxiliar na compreensão dos conteúdos explorados. Por outro lado, as referências 4 a 7 são fontes auxiliares de busca de exercícios à serem utilizadas no treinamento. É recomendado que os professores reforcem, junto a seus alunos, que em caso de dúvidas futuras, relativas à teoria ou a quaisquer exercícios, as mesmas podem ser postadas no fórum HH, podendo cada aluno, assim, ter o auxílio de seu respectivo moderador de fórum (MF).

Exercícios a serem discutidos com os alunos: A seguir iremos apresentar uma listagem de sugestões de exercícios à serem trabalhados com os alunos. Além disso, é importante destacar a existência de dois materiais no Portal da Matemática que são boas fontes de exercícios complementares, a saber:

(a) <http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/gfemxnydsdkok.pdf>

(b) <http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/hvgyb71kxo0s0.pdf>

(I) Exemplo 1, página 30, da Apostila do PIC da OBMEP “Métodos de Contagem e Probabilidade”, Paulo Cezar Pinto Carvalho.

De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

Solução: A solução encontra-se na página 30, da Apostila do PIC da OBMEP “Métodos de Contagem e Probabilidade”, Paulo Cezar Pinto Carvalho.

(II) Exemplo 3, página 32, da Apostila do PIC da OBMEP “Métodos de Contagem e Probabilidade”, Paulo Cezar Pinto Carvalho.

Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMÁTICA?

Solução: A solução encontra-se na página 32, da Apostila do PIC da OBMEP “Métodos de Contagem e Probabilidade”, Paulo Cezar Pinto Carvalho.

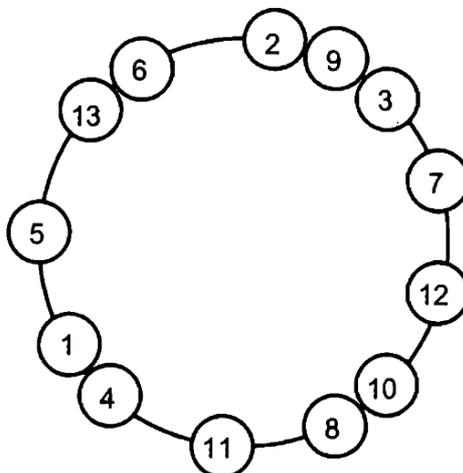
(III) Exemplo 4, página 34, da Apostila do PIC da OBMEP “Métodos de Contagem e Probabilidade”, Paulo Cezar Pinto Carvalho.

De quantos modos 6 pessoas (João, Maria, Pedro, Janete, Paulo e Alice) podem ser divididas em 3 duplas?

Solução: A solução encontra-se na página 34, da Apostila do PIC da OBMEP “Métodos de Contagem e Probabilidade”, Paulo Cezar Pinto Carvalho.

(IV) Problema 24, páginas 16 e 17, do livro 'Círculos Matemáticos' (ver referência 5 - contagem).

Um “colar” consiste em um fio circular com diversas contas presas nele. É permitido girar o colar, mas não virá-lo de cabeça para baixo. Quantos colares diferentes podem ser feitos com 13 contas diferentes?



Solução. A solução encontra-se nas páginas 16 e 17 do livro 'Círculos Matemáticos'.

(V) Problema 4.6, página 9, do livro Um Círculo Matemático de Moscou de S. Dorichenko (ver referência 6 - contagem).

Formalmente, um anagrama de uma palavra ou frase é uma permutação das letras para formar uma palavra ou frase diferente. Em anagramas, os espaços e acentos são ao geralment e ignorados. Por exemplo, um anagrama de “anagrama” é “naga a ram”. Em matemática, e para este problema, usamos com frequência “anagrama” para significar qualquer permutação de letras em uma palavra, de modo que consideramos “aaaarngm” como sendo um anagrama de “anagrama”.

(a) Quantos anagramas tem a palavra MOCINHA?

(b) Você pode encontrar um anagrama que signifique um animal? Você pode encontrar outros que sejam palavras em português?

(c) Decifre a frase a seguir onde as palavras corretas estão substituídas por seus anagramas:
VALORES BRALEMPOS SACATOMITEM TEMERIANIDA.

(d) Quantos anagramas tem a palavra CABRA?

(e) E quantos tem a palavra BANANA?

Solução. A solução encontra-se página 78 / 79, do livro citado de S. Dorichenko.

4ª Semana: encontro entre professores e alunos

- Assuntos a serem abordados: **Geometria 5** – Paralelismo: quadriláteros notáveis.

- Textos a serem estudados com os alunos: antes da realização do encontro, por favor leia os materiais impressos e assista a todos os vídeos anteriormente indicados. Incentive os seus alunos a fazerem o mesmo. Explore a Seção 6.1 da referência (1) Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Geometria – Parte 1”. Deve-se dar ênfase nas propriedades angulares relativas a uma reta transversal a duas retas paralelas. Observe que as videoaulas [Atravessando um rio... retas cortadas por uma transversal](#), [Resolvendo o problema do rio](#) e [Teorema dos bicos](#) são materiais complementares interessantes nesse contexto. Os quadriláteros, tratados na seção 5.4 da referência (1) Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Geometria – Parte 1” é o foco principal de nosso estudo de geometria nesse ciclo. Apresente a seus alunos os quadriláteros notáveis e faça alguns exemplos presentes nessa referência. Além disso, oriente os alunos para abordarem a definição de quadriláteros, encontrada na videoaula [Quadriláteros](#), e de quadriláteros notáveis, presente na videoaula [Paralelogramos especiais](#). Recomendamos também que apresente a seus alunos propriedades / definições equivalentes de paralelogramos, encontradas na videoaula [Paralelogramos: Definição e equivalências](#), com possíveis aplicações presentes na videoaula [Uma aplicação de propriedades de paralelogramos](#). Caso haja tempo disponível, explore a videoaula [Trapézios](#), nela encontrará a definição e propriedades dos trapézios.

-Exercícios a serem discutidos com os alunos: seguindo a mesma dinâmica anterior, espera-se que o professor proponha e discuta com seus alunos de 6 a 8 exercícios relacionados com o tema em foco. Esses problemas devem abranger principalmente as definições e propriedades dos quadriláteros, em particular o losango, o paralelogramo e o trapézio. Observe que alguns problemas interessantes sobre quadriláteros são encontrados nas videoaulas [Problemas com paralelogramos](#) e [Dois problemas sobre quadriláteros](#). A seguir apresentaremos um conjunto de sugestões de exercícios que podem ser abordadas pelo professor:

(I) Na referência (4) **Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko**, você encontrará os três seguintes problemas, cujas respostas encontram-se nas páginas indicadas abaixo.

Questão 1. [Problema 5.1, enunciado na pág. 11, com resolução na pág. 83].

Todos os quatro lados de um quadrilátero são congruentes. Ele é necessariamente um quadrado?

Questão 2. [Problema 6.1, enunciado na pág. 13, com resolução na pág. 87].

Uma das diagonais de um losango é igual a um de seus lados. Quais são as medidas dos ângulos do losango?

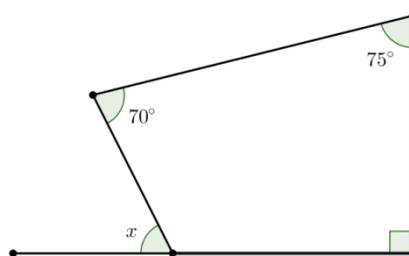
Questão 3. [Problema 11.1. enunciado na pág. 23, com resolução na pág. 107].

Para verificar se um pedaço de pano é quadrado, um alfaiate dobra ele ao longo de cada uma das suas diagonais e verifica se as arestas coincidem. Basta fazer isso?

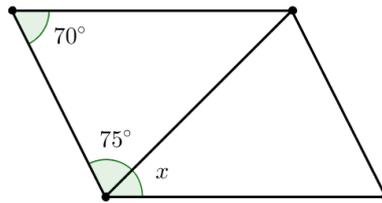
(II) No **Portal da Matemática**: 8º Ano do Ensino Fundamental – Elementos Básicos de Geometria - Parte 3: **Caderno de exercícios “Quadriláteros”**, <http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/pcb71g18gpc80.pdf>,

Pode-se abordar os seguintes exercícios (cujas resposta encontram-se na **página 4** deste material).

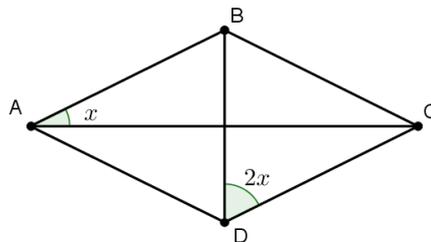
(Exercício 1.) Determine o valor de x no quadrilátero abaixo.



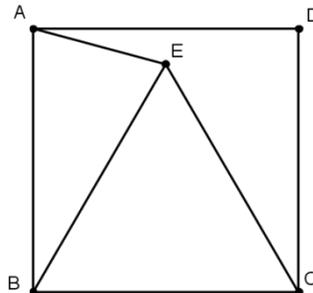
(Exercício 4.) Calcule o valor de x no paralelogramo abaixo.



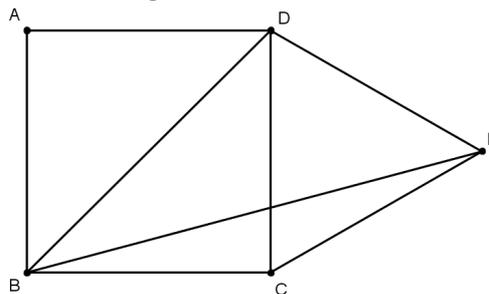
(Exercício 5.) Calcule o valor de x no losango abaixo.



(Exercício 10.) Determine a medida do ângulo \hat{AEB} no quadrado $ABCD$ abaixo, sabendo que o triângulo BCE é equilátero.



(Exercício 11.) O quadrilátero $ABCD$, da figura abaixo, é quadrado e o triângulo DCE é equilátero. Determine a medida do ângulo E do triângulo DBE .



(III) Na referência (3) OBMEP – Banco de Questões 2015, na página 42 encontra-se a questão:

“Quadriláteros com todos os lados iguais não são congruentes”

Um erro que muitos alunos cometem é pensar que dois quadriláteros são congruentes se tiverem os seus respectivos lados iguais. Isso não é verdade. Nesse problema, veremos que quadriláteros podem ter lados correspondentes iguais, mas áreas distintas.

a) Mostre que a maior área possível para um quadrilátero que possui dois lados de comprimento 3 e dois de comprimento 4 é 12.

b) Mostre que, nos quadriláteros em que isso acontece, a soma dos ângulos opostos é 180° .

Solução: A resolução encontra-se na página 128, da citada referência.