ENCONTRO 1

No primeiro encontro presencial do módulo de Aritmética, pretende-se que sejam realizados estudos sobre os seguintes temas.

Assuntos	**Materiais relacionados**	**Vídeos no canal picobmep no YouTube**
Discussão de alguns problemas do tema paridade para motivação inicial.	Fomin: capítulo 1 – Paridade Fomin: capítulo zero	18, 19, 20
Estudo do sistema decimal de numeração destacando a importância da posição dos algarismos na representação decimal de um número inteiro. Domínio das quatro operações básicas entre números naturais.		1, 2, 3, 4, 5, 11
Base binária: estudo de alguns problemas de pesagens com balanças.	Fomin: seção 1 do capítulo 15	12, 13, 14, 15, 16

1.1 Paridade

O objetivo do módulo de Aritmética é explorar o conjunto dos números inteiros, suas principais propriedades e aplicar estes conceitos no estudo de situações discretas. Uma das estruturas mais básicas do conjunto dos números naturais é a sua divisão em números pares e ímpares. Apesar disto ser muito simples, a análise da paridade dos números pode ser utilizada na solução de vários problemas, como os que estão sugeridos a seguir.

Exercício 1: [JOGO DAS FACES] Para iniciar o estudo de paridade, sugerimos a seguinte adivinhação que pode ser realizada entre o Professor Orientador e os alunos.

(a) Sobre uma mesa coloque 5 moedas: três com a coroa para cima e duas com a cara para cima (veremos logo a seguir que estes números podem ser trocados por quaisquer outros).

(b) O Professor vira de costas para as moedas e pede para os alunos virarem uma moeda qualquer.

(c) Em seguida, ele pede para os alunos virarem novamente uma moeda qualquer (que pode inclusive ser a mesma que tinha sido virada anteriormente).

(d) E o professor continua pedindo que os alunos virem uma moeda qualquer por vez, totalizando 6 viradas ao todo (veremos que este número também poderá ser substituído por um outro qualquer).

(e) Após 6 viradas, o professor solicita que os alunos escondam uma moeda, observando antes a sua face superior.

(f) Escondida a moeda, o professor observa, então, as 4 moedas que ficaram sobre a mesa e adivinha a face superior da moeda escondida.

Pergunta: como o professor consegue adivinhar a face superior da moeda escondida?

Solução. No início do jogo, temos 3 coroas e 2 caras, ou seja, temos um número ímpar de coroas e um número par de caras. Após uma moeda ser virada, podemos ter 4 coroas e 1 cara, ou então, 2 coroas e 3 caras. Observe que independente da moeda que foi virada passamos a ter uma quantidade par de coroas e uma quantidade ímpar de caras. Continuando este raciocínio vemos que após ser executada uma virada de moeda, a paridade do número de caras e a paridade do número de coroas muda (de par para ímpar ou de ímpar para par). E isto acontece em cada virada.

	COROAS	CARAS
início	ímpar	par
após a 1ª virada	par	ímpar
após a 2ª virada	ímpar	par
após a 3ª virada	par	ímpar
após a 4ª virada	ímpar	par
após a 5ª virada	par	ímpar
após a 6ª virada	ímpar	par

Observe que após 6 viradas estamos como na posição inicial: uma quantidade ímpar de coroas e uma quantidade par de caras. Quando os alunos escondem uma moeda, seja ela cara ou coroa, a paridade do mesmo tipo de moeda escondida muda em relação a situação inicial. Deste modo:

1. Se os alunos esconderam uma coroa, a quantidade de coroas existentes nas 4 moedas que sobraram na mesa é par.
2. Se os alunos esconderam uma cara, a quantidade de caras deve ser ímpar.

Daí, ao observar as 4 moedas restantes, basta que o professor observe a paridade de caras ou coroas que está diferente da situação inicial. O tipo, cara ou coroa, que estiver diferente da situação inicial é o tipo de moeda escondida pelos alunos.

Observe que esta adivinhação pode ser generalizada para uma quantidade qualquer de moedas e para uma quantidade qualquer de caras e de coroas exibidas no início da partida. Para entender a adivinhação é suficiente perceber que a cada virada de uma moeda, a paridade da quantidade de caras e a paridade da quantidade de coroas muda. Após um número par de viradas, estamos na mesma paridade do início do jogo. E após um número ímpar de viradas a paridade é invertida em relação àquela do início do jogo.

No Capítulo 1 (paridade) do livro do Fomin existem muitos problemas motivadores interessantes relacionados com o tema deste primeiro encontro presencial. Sugerimos que os alunos estudem este capítulo do livro do Fomin. Para o grupo G1,1 gostaríamos de enfatizar os seguintes problemas.

Exercício 2: Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 100? (Este problema está discutido no vídeo 18.)

Exercício 3:

1. Existem dois números pares consecutivos?

2. Existem dois números ímpares consecutivos?

3. Existe um número natural que não é par nem ímpar?

4. Escreva dois números pares. Agora some estes dois números. O resultado obtido é par ou ímpar? Repetindo este experimento com

outros números, você poderá obter uma soma par ou uma soma ímpar? Justifique a sua conclusão.

5. O que podemos dizer da soma de dois números ímpares? O resultado é par ou ímpar?

6. E a soma de um número par com um número ímpar?

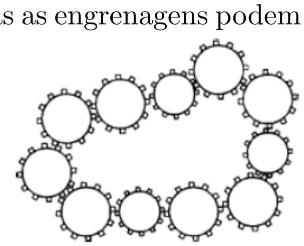
7. E se somarmos uma quantidade par de números ímpares?

8. E a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares, é par ou ímpar?

Além do Capítulo 1 do livro do Fomin, existem dois artigos interessantes que tratam de problemas envolvendo paridades. O artigo "Paridade" de Eduardo Wagner publicado na Edição Especial OBMEP 2006 da revista *Eureka!*, e o artigo "Par ou Ímpar? Eis a questão" de Samuel Barbosa Feitosa e Einstein do Nascimento Júnior publicado na revista *Eureka!* número 31. Estes materiais fornecem uma grande quantidade de problemas que podem ser utilizados na aula presencial e no fórum. Vejamos mais alguns exercícios.

Exercício 4: (Fomin, capítulo 1, problema 16) É possível trocar uma nota de 25 rublos em dez notas com valores 1, 3 ou 5 rublos?

Exercício 5: (Fomin, capítulo 1, problema 1) Onze engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em uma cadeia como está ilustrado na figura a seguir. Todas as engrenagens podem rodar simultaneamente?



Exercício 6: (Fomin, capítulo 1, problema 17) Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990? (Um problema muito parecido com este está resolvido no vídeo 20.)

Solução. Em cada página, de um lado está escrito um número par e do outro lado está escrito um número ímpar. Assim Vitor somou 25 números pares (obtendo um número par) e somou 25 números ímpares (obtendo um número ímpar). Como a soma de um par e um ímpar é um número ímpar, esta soma não pode ser igual a 1990.

Exercício 7a: (Fomin, capítulo 1, problema 20) Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de "+" e de "−" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

Solução. Não é possível. Imaginando que fosse possível, poderíamos separar os números dados em dois grupos com a mesma soma (basta passar todos os números com sinal negativo para o outro lado da expressão que é igual a zero). Entretanto a soma dos números naturais de 1 a 10 é igual a 55. Como este número é ímpar, não podemos separar os números dados em dois grupos que tenham a mesma soma.

Exercício 7b: Continuando o exercício anterior, vamos imaginar que os números de 1 a 11 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de "+" e de "−" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

Solução. Como no caso anterior, para isto ser possível, devemos dividir os números dados em dois grupos com mesma soma. Como a soma dos números naturais de 1 a 11 é igual a 66, precisamos de dois grupos cuja soma seja igual a 33. Começando pelos maiores, observe que $11+10+9 =$

30. Daí, $11 + 10 + 9 + 3 = 33$. Assim, $1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$ e, portanto, $1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 11 + 10 + 9 + 3$. Daí obtemos $1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 - 11 = 0$.

Exercício 7c: Como **desafio** mostre que sempre que a soma dos números de 1 até n é par, então é possível separar os números de 1 até n em dois subgrupos de números de igual soma. Relacionado com este desafio podem ser levantadas várias questões, como as exemplificadas a seguir. Observamos que no Portal da Matemática, no 8º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Números Naturais: contagem, divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana" o vídeo "A soma de números naturais" e o vídeo "Soma de números naturais: resolução de exercícios" apresentam soluções para este desafio.

(a) Qual é o valor da soma $1 + 2 + 3 + \cdots + 2014$? Esta soma é par ou é ímpar?

(b) Qual é a soma dos múltiplos de 3 entre 1 e 301.

(c) Calcule as somas $1 + 2 + 3 + \cdots + 20$, $1 + 2 + \cdots + 50$ e $21 + 22 + 23 + \cdots + 50$.

(d) Para quais valores de n a soma dos números de 1 até n é par?

(e) Indique como o exercício 7b poderia ser revolvido para a lista dos números de 1 até 100.

Exercício 7d: (Fomin, capítulo 1, problema 21) Um gafanhoto pula ao longo de uma linha. No seu primeiro pulo, ele anda 1 cm, no segundo 2 cm, no terceiro 3 cm, e assim sucessivamente. Cada pulo o leva para a direita ou para a esquerda. Mostre que após 1985 pulos, o gafanhoto não pode retornar a sua posição inicial.

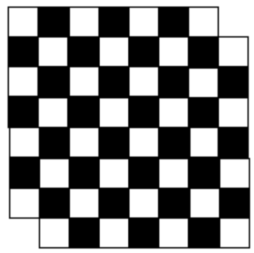
Solução. Este exercício pode ser considerado como uma aplicação dos problemas anteriores. Em cada pulo, quando o gafanhoto andar para a direita, vamos colocar um sinal "+" na distância que ele percorreu, e quando ele andar para a esquerda vamos colocar um sinal "−" na distância que ele percorreu no pulo. Assim, para ele retornar para a posição inicial deve ser possível colocar sinais de "+" e de "−" na frente e entre os números naturais de 1 até 1985 de modo que a expressão resultante seja igual a zero. Entretanto, como a soma dos números de 1 até 1985 é ímpar, concluímos que isto é impossível.

Exercício 8: (Fomin, capítulo 1, problema 10) Todas as peças de um dominó foram colocadas em uma cadeia de modo que o número de bolinhas nas extremidades de dois dominós adjacentes são iguais. Se uma das extremidades da cadeia contém 5 bolinhas, qual é o número de bolinhas na outra extremidade? (Este problema está resolvido no vídeo 19.)

Os exercícios 9, 10, 11 e 12 tratam de problemas com tabuleiros. No vídeo 18 existe uma excelente explicação sobre o tabuleiro do xadrez, sobre a nomenclatura utilizada para cada uma de suas casas e sobre a forma de movimentação de um cavalo.

Exercício 9: (Fomin, capítulo 1, problema 8) Um tabuleiro 5×5 pode ser coberto por dominós 1×2?

Exercício 10: (Fomin, capítulo 1, problema 23) Considere um tabuleiro de xadrez (com $8 \times 8 = 64$ casas). Suponha que você tenha peças de dominó, cada uma com o tamanho exato de duas casas do tabuleiro. Observe que, deste modo, pode-se cobrir todo o tabuleiro de xadrez com exatamente 32 peças de dominó. Quando são retiradas do tabuleiro duas casas diagonalmente opostas, ainda é possível cobri-lo com 31 peças de dominó?



Solução. Não é possível. Um tabuleiro usual de xadrez possui 32 casas brancas e 32 casas pretas. Quando são retiradas as duas casas diagonalmente opostas, obtemos um novo tabuleiro com 32 casas brancas e 30 casas pretas. Como cada peça do dominó cobre exatamente uma casa branca e uma casa preta, para cobri-lo com as peças de dominó, o número de casas brancas deve ser igual ao número de casas pretas.

Exercício 11: (Fomin, capítulo 1, problema 2) Em um tabuleiro de xadrez, um cavalo sai do quadrado a1 e retorna para a mesma posição depois de vários movimentos. Mostre que o cavalo fez um número par de movimentos.

Solução. Em cada movimento o cavalo sai de uma casa de uma cor e chega em uma casa de cor diferente. Assim, durante os movimentos, as cores das casas ocupadas pelo cavalo se alternam. Portanto, somente após um número par de movimentos ele pode ocupar a casa de mesma cor que ele ocupava inicialmente.

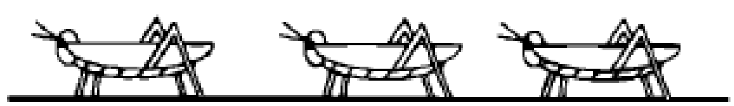
Exercício 12: (Fomin, capítulo 1, problema 3) É possível um cavalo começar na posição a1 de um tabuleiro de xadrez e terminar em h8 visitando cada um dos quadrados restantes exatamente uma vez ao longo do caminho?

Solução. Não é possível. Em cada movimento, um cavalo salta de um quadrado de uma cor para um de cor oposta. Como o cavalo tem que fazer 63 movimentos, após este último movimento (de número ímpar), ele é levado para um quadrado de cor oposta à cor onde ele começou. No entanto, os quadrados a1 e h8 têm a mesma cor.

Exercício 13: (Fomin, capítulo 1, problema 5) Três discos de borracha, A, B e C, utilizados no hóquei sobre o gelo, estão no campo. Um jogador bate em um deles de tal forma que ele passa entre os outros dois discos. Ele faz isto 25 vezes. Ele pode retornar os três discos às suas posições iniciais? (Veja a solução deste problema no vídeo 20.)

Solução. Não é possível. Olhando o campo de cima, observamos que os três discos formam os vértices de um triângulo. Lendo os vértices na ordem alfabética, em uma jogada os vértices estão ordenados no sentido horário e na outra jogada os vértices estão ordenados no sentido anti-horário. Após um número ímpar de movimentos a ordem dos vértices é a oposta da ordem inicial. Assim, após um número ímpar de movimentos, os discos não podem voltar para a sua posição inicial.

Exercício 14: (Fomin, capítulo 1, problema 30) Três gafanhotos estão brincando ao longo de uma linha. Na sua vez, cada gafanhoto pode pular sobre um outro gafanhoto, mas não sobre os outros dois. Eles podem retornar para suas posições iniciais após 2011 movimentos?



Solução. Este problema pode ser resolvido de modo análogo ao problema anterior.

Exercício 15: Em um conjunto de 101 moedas, há 50 falsas e as demais são verdadeiras. Uma moeda falsa difere de uma verdadeira em 1 grama. Marcos tem uma balança que mostra a diferença de pesos entre os objetos colocados nos dois pratos. É possível, com uma pesagem, identificar se a moeda escolhida é falsa? (Veja a solução deste problema no vídeo 20.)

1.2 Sistema posicional de numeração

Nesta seção são apresentadas atividades que contribuem para um correto entendimento do sistema posicional de numeração. Ao serem realizadas, esperamos que os alunos percebam que na representação decimal de um número, a posição de um algarismo interfere em seu valor relativo. Por exemplo, no número 742, o algarismo 7 significa sete centenas, o número 4 significa quatro dezenas e o 2 significa duas unidades, ou equivalentemente: $742 = 700 + 40 + 2 = 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$.

Observamos que o vídeo 11 do canal picobmep no YouTube apresenta o sistema posicional de numeração. Vale a pena ver as explicações apresentadas neste vídeo. Após estudar o conteúdo, resolva os seguintes problemas.

Exercício 16: (Fomin, capitulo 0, problema 8) Retire 10 dígitos do número 1234512345123451234512345 de modo que o número remanescente seja o maior possível. E para formar o menor número, como deveríamos proceder?

Solução. O maior número é 553451234512345 e o menor número é