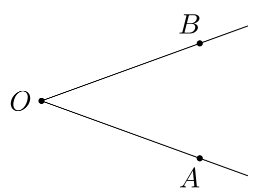
5.2 Ângulos

Um **ângulo** é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. Estas semirretas são chamadas de **lados** e a origem comum dos lados é o **vértice** do ângulo. Na figura a seguir vemos um ângulo com lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e com vértice no ponto O. Em uma situação como esta, este ângulo será denotado por $A\hat{O}B$.



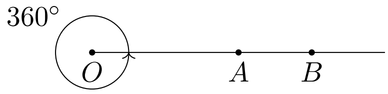
Quando os lados não são coincidentes, um ângulo divide o plano em duas regiões ilimitadas, chamadas de **regiões angulares**. Para indicar cada uma destas regiões, costuma-se utilizar um pequeno arco de circunferência com centro no vértice do ângulo. A figura a seguir ilustra as duas regiões angulares determinadas por um ângulo.

Vamos mostrar agora que do mesmo modo que medimos o comprimento de um segmento, também podemos medir a abertura de um ângulo. Após definir a medida de um ângulo, veremos que o termo "ângulo" será utilizado para significar três coisas: o ângulo propriamente dito (figura formada por duas semirretas de mesma origem); uma das regiões

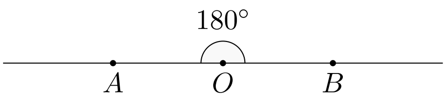
“geometria˙diagra
2015/7/22
page 10
Estilo OBMEP

angulares determinada por um ângulo; e o número que é a medida da abertura de uma dessas regiões angulares. Apesar desta tripla possibilidade, o contexto sempre determina cada caso.

Os ângulos são medidos em **graus**. O ângulo que dá uma volta completa ao redor da sua origem tem 360 graus. Para abreviar a notação, substituímos a palavra “graus” por um pequeno círculo em cima e à direita do número. Assim escrevemos 360° para indicar “360 graus”.

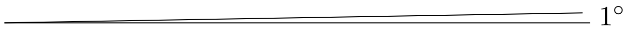


Um ângulo que dá meia volta ao redor da sua origem mede 180 graus ou, abreviadamente, 180°. Este é um ângulo **raso** e os seus dois lados são duas semirretas opostas, pertencentes a uma mesma reta.

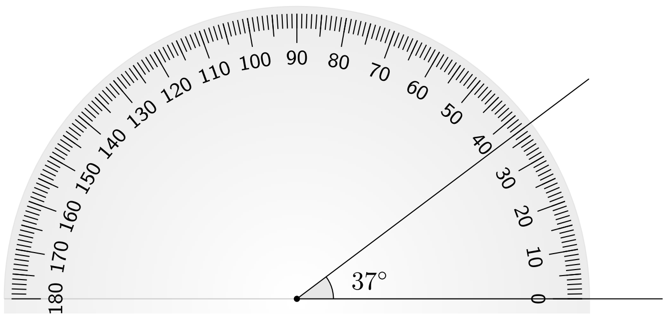


Um ângulo que dá um quarto de volta ao redor da sua origem mede 90°. Este é um ângulo **reto** e ele é formado pela interseção de duas retas **perpendiculares**. Diferentemente dos outros ângulos que são indicados por pequenos arcos de circunferência, um ângulo reto é indicado por um pequeno quadradinho como está ilustrado na figura a seguir onde, do lado esquerdo, vemos um ângulo reto e, do lado direito, vemos duas retas perpendiculares r e s, formando quatro ângulos retos.

Um ângulo com medida de um grau é obtido quando dividimos uma circunferência em 360 partes iguais. Este ângulo tem uma abertura muito pequena e se parece com alguma coisa assim:

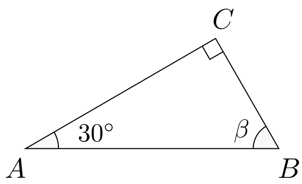


Para medir um ângulo utilizamos um transferidor. Por exemplo, na figura a seguir o ângulo indicado mede 37°.



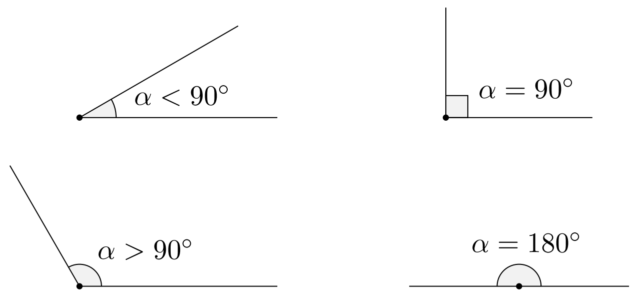
Os ângulos não precisam ser múltiplos inteiros de um grau. Existem ângulos com medidas fracionárias. As principais subdivisões de um grau são os **minutos** e os **segundos**: um minuto é $\frac{1}{60}$ de um grau e um segundo é $\frac{1}{60}$ de um minuto. Para aprender mais sobre medida de ângulos e operações com graus, minutos e segundos assista o vídeo 5, o vídeo 8 e o vídeo 9 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube.

Gostaríamos de observar que podemos utilizar várias notações diferentes para ângulos. Por exemplo, no triângulo da figura a seguir estão indicados três ângulos: $B\hat{A}C = 30°$, $A\hat{B}C = \beta$ e $A\hat{C}B = 90°$. Quando não existir possibilidade de confusão, podemos abreviar a notação, escrevendo apenas $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = \beta$ e $\hat{C} = 90°$. Em palavras, também podemos dizer que temos um ângulo de 30° no vértice A, um ângulo de medida β no vértice B e um ângulo reto no vértice C. Observe também que podemos utilizar a mesma notação para o ângulo e para a medida do ângulo. Por exemplo, a notação $B\hat{A}C$ indica o ângulo de lados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e com vértice no ponto A, e esta mesma notação pode indicar a medida deste ângulo, quando escrevemos $B\hat{A}C = 30°$.

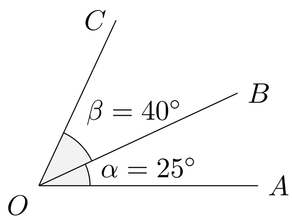


Já vimos as definições de ângulo raso e de ângulo reto. De modo geral, os ângulos são classificados do seguinte modo: dado um ângulo $\alpha = A\hat{O}B$, então:

- α é um ângulo **agudo** se $0° < \alpha < 90°$.
- α é um ângulo **reto** se $\alpha = 90°$. Este é o ângulo formado por duas retas **perpendiculares**.
- α é um ângulo **obtuso** se $90° < \alpha < 180°$.
- α é um ângulo **raso** se $\alpha = 180°$.



Podemos **somar** dois ângulos desenhando um deles junto do outro, fazendo os seus vértices coincidirem e um lado de um ângulo coincidir com um lado do outro ângulo. Neste caso formamos dois **ângulos adjacentes**. Por exemplo, na figura a seguir vemos a soma do ângulo $\alpha = A\hat{O}B = 25°$ com o ângulo $\beta = B\hat{O}C = 40°$, formando o ângulo $\alpha + \beta = A\hat{O}C = 65°$. Nesta figura, α e β são ângulos adjacentes.

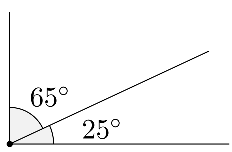


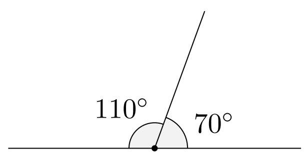
Existem dois casos especiais para o valor da soma de dois ângulos que vale a pena definir (veja o vídeo 6).

- Dois ângulos α e β são **complementares** quando a soma das suas medidas é igual a 90°. Neste caso, dizemos que α é o **complemento** de β e vice-versa. Por exemplo, os ângulos de medidas 25° e 65° são complementares, pois 25° + 65° = 90°. Neste caso dizemos que o complemento do ângulo de 25° é o ângulo de 65°.

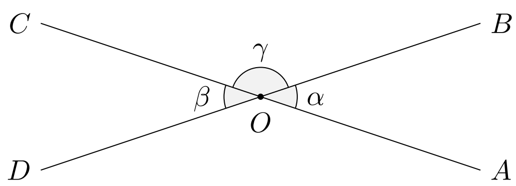
Observe que na soma de dois ângulos complementares obtemos um ângulo reto, ou seja, retas perpendiculares.

- Dois ângulos α e β são **suplementares** quando a soma das suas medidas é igual a $180°$. Aqui dizemos que α é o **suplemento** de β e vice-versa. Por exemplo, os ângulos $70°$ e $110°$ são ângulos suplementares, pois $70° + 110° = 180°$. Observe que na soma de dois ângulos suplementares obtemos um ângulo raso.





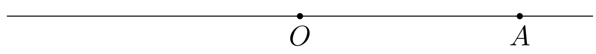
Para terminar esta parte de definições básicas sobre ângulos, vamos definir o conceito de ângulos opostos pelo vértice. Dizemos que duas retas concorrentes $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ em um ponto O definem dois pares de **ângulos opostos pelo vértice**: $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são ângulos opostos pelo vértice, assim como $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ também são ângulos opostos pelo vértice. Então, para dois ângulos serem opostos pelo vértice eles devem possuir o mesmo vértice e os seus lados devem se juntar para formar duas retas. Na figura a seguir, α e β são ângulos opostos pelo vértice.



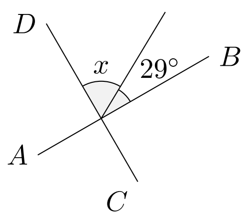
Utilizando o conceito de ângulos suplementares podemos mostrar que dois ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida. De fato, na figura anterior $\alpha = A\hat{O}B$ e $\beta = C\hat{O}D$ são ângulos opostos pelo vértice. Se $\gamma = B\hat{O}C$ então $\alpha + \gamma = 180°$ pois estes ângulos são suplementares. De modo análogo, vemos que $\beta + \gamma = 180°$. Daí $\alpha = 180° - \gamma = \beta$ (veja esta demonstração no vídeo 7).

Exercícios:

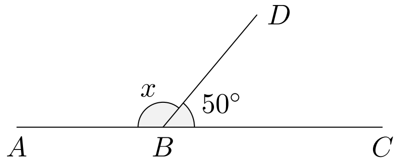
1. (Transferidor) Com o auxílio de um transferidor, sobre a figura a seguir desenhe semirretas $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$ tais que $A\hat{O}B = 30°$, $A\hat{O}C = 60°$, $A\hat{O}D = 90°$ e $A\hat{O}E = 135°$.



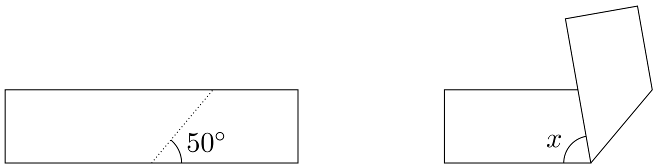
2. O que é um ângulo reto? O que são retas perpendiculares? O que significa dizer que dois ângulos são complementares? Na figura a seguir as retas AB e CD são perpendiculares. Neste caso, qual é a medida do ângulo x? (veja vídeo 7).



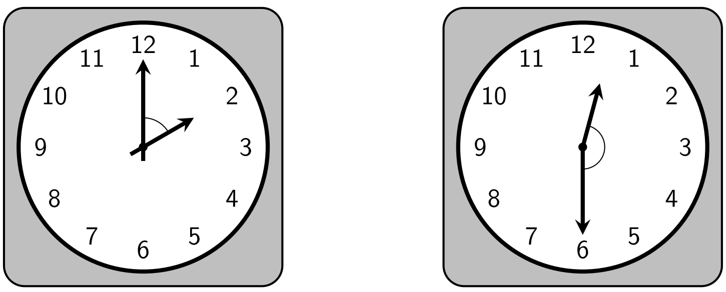
3. O que é um ângulo raso? O que são ângulos suplementares? Na figura a seguir, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a medida do ângulo x?



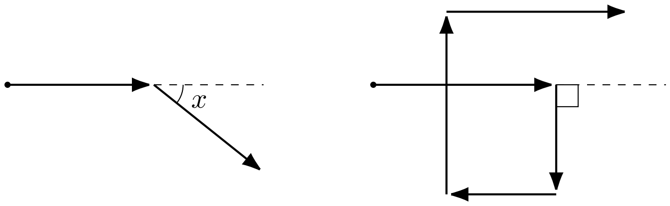
4. **(OBMEP 2006 – N2Q13 – 1ª fase)** Uma tira de papel retangular é dobrada ao longo da linha tracejada, conforme indicado, formando a figura plana a seguir. Qual a medida do ângulo x?



5. **(OBMEP 2006 – N1Q11 e N2Q10 – 1ª fase)** Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando ele marca 2 horas? E qual é este menor ângulo quando o relógio marca 12 horas e 30 minutos?



6. (Banco de Questões 2013 – Nível 1 – questão 15) Um certo robô só anda para a frente ou vira à direita, com um ângulo de x graus em relação à direção original com que estava andando, conforme é mostrado na figura a seguir, à esquerda. Para retornar à direção e ao sentido original, o robô precisa virar à direita um certo número de vezes. Por exemplo, se $x = 90°$, então, o robô precisa virar à direita quatro vezes. Observe isto na figura a seguir, à direita.

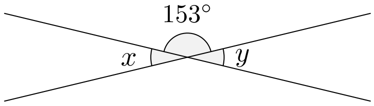


(a) Quantas vezes o robô precisa virar à direita se $x = 60°$?

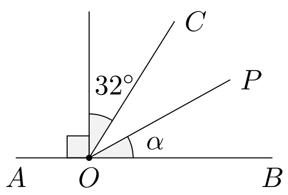
(b) Quantas vezes o robô precisa virar à direita se $x = 42°$?

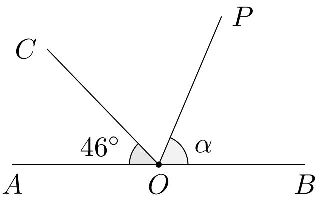
(c) E se $x = 47°$?

7. Na figura vemos duas retas concorrentes. Determine as medidas dos ângulos x e y.



8. A **bissetriz** de um ângulo é a semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que divide o ângulo em dois ângulos de mesma medida. Nas figuras a seguir, determine a medida do ângulo α sabendo que os pontos A, O e B estão alinhados e que a semirreta $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{O}C$ (para estudar o conceito de bissetriz assista o vídeo 7).



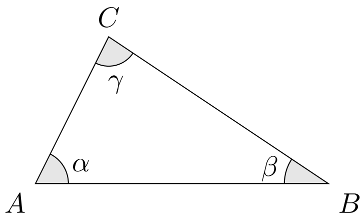


9. Dois ângulos adjacentes somam 136°. Qual é a medida do ângulo formado pelas suas bissetrizes?

10. As bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam um ângulo de 52°. Se um deles mede 40°, qual é a medida do outro ângulo?

5.3 Triângulos

Os segmentos de reta que unem três pontos não colineares A, B e C formam um **triângulo**, que será indicado como o triângulo ABC.

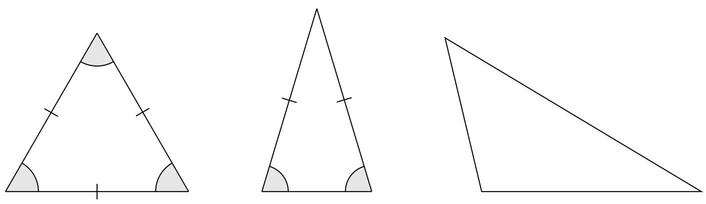


Neste caso, os pontos A, B e C são os **vértices** e os segmentos AB, BC e CA são os **lados** do triângulo. Os ângulos $\alpha = C\hat{A}B$, $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = B\hat{C}A$ são os **ângulos internos** do triângulo.

Podemos classificar os triângulos de duas maneiras básicas: em relação aos comprimentos dos seus lados ou em relação às medidas dos seus ângulos internos. No que segue vamos apresentar simultaneamente estas duas classificações (assista no vídeo 14 uma explicação detalhada destas classificações).

- Um triângulo é **equilátero** se os seus três lados tiverem o mesmo comprimento. De modo equivalente, um triângulo é equilátero se os seus três ângulos internos tiverem a mesma medida.
- Um triângulo é **isósceles** se ele possuir pelo menos dois lados de mesmo comprimento. De modo equivalente, um triângulo é isósceles quando dois dos seus ângulos internos tiverem a mesma medida.
- Um triângulo é **escaleno** quando os seus três lados tiverem comprimentos diferentes. De modo equivalente, um triângulo é escaleno quando todos os seus ângulos internos tiverem medidas diferentes.

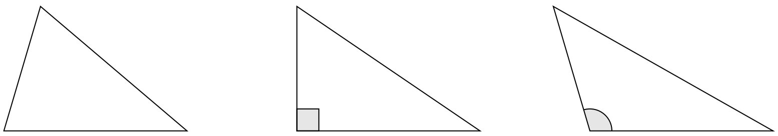
Na figura a seguir vemos, em ordem, um triângulo equilátero, um triângulo isósceles e um triângulo escaleno. Observe que no triângulo equilátero os três ângulos internos possuem a mesma medida e que no triângulo isósceles existem dois ângulos internos com mesma medida.



- Um triângulo é **acutângulo** quando todos os seus ângulos internos forem agudos.
- Um triângulo é **retângulo** quanto possuir um ângulo interno reto, isto é, um ângulo interno de medida igual a $90°$.

- Um triângulo é **obtusângulo** quando possuir um ângulo interno obtuso.

Na figura a seguir vemos, em ordem, um triângulo acutângulo, um triângulo retângulo e um triângulo obtusângulo.

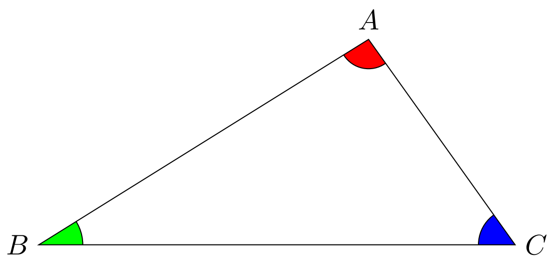


Se ABC é um triângulo isósceles com lados iguais $\overline{AB} = \overline{AC}$, dizemos que o lado BC é a **base** deste triângulo isósceles. Então se um triângulo isósceles possui dois lados iguais e um lado diferente, então este lado diferente é a base do triângulo. Entretanto, se um triângulo isósceles possui todos os lados iguais ele é um triângulo equilátero e neste caso qualquer um dos seus lados pode ser chamado de base. Observe que todo triângulo equilátero é um triângulo isósceles, mas nem todo triângulo isósceles é equilátero.

Soma dos ângulos internos

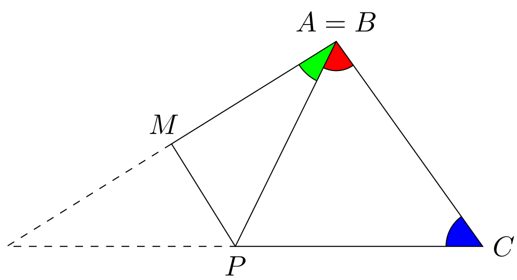
Vamos falar agora sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Para determinar formalmente o valor desta soma precisamos de resultados que somente serão estudados no próximo encontro presencial. Entretanto, como é importante saber o valor desta soma e como ela apresenta várias aplicações, vamos determinar o valor desta soma através de uma atividade de dobradura e vamos deixar a demonstração formal para o próximo encontro presencial. Até lá podemos ir nos familiarizando com o resultado e também podemos utilizá-lo na resolução de vários problemas.

- Em uma folha de papel, utilizando uma régua desenhe um triângulo qualquer ABC e, para poder visualizar melhor, faça marcas de ângulos nos três cantos, como na ilustração a seguir. Não precisa imitar a ilustração, faça um triângulo do seu gosto e tamanho, mas não o faça muito pequeno.

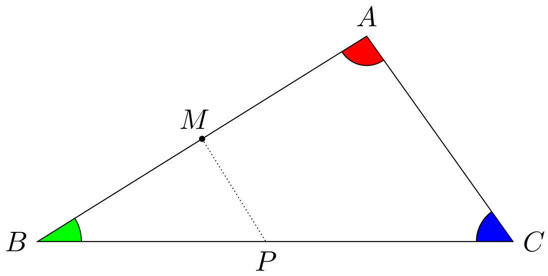


- Recorte o triângulo e pinte, dos dois lados do papel, cada ângulo de uma cor. A cor de um lado deve ser igual à cor do outro, como se a tinta atravessasse o papel.

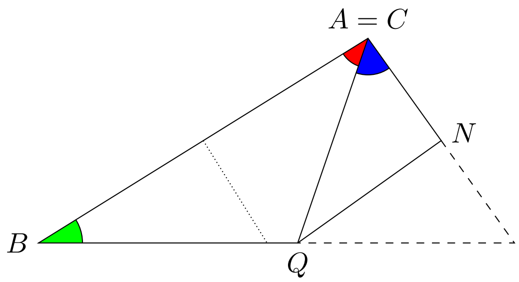
- Faça a dobra MP de modo que o ponto B coincida com o ponto A, como está indicado na figura a seguir, Passando as pontas dos dedos exatamente sobre a dobra, marque o segmento MP.



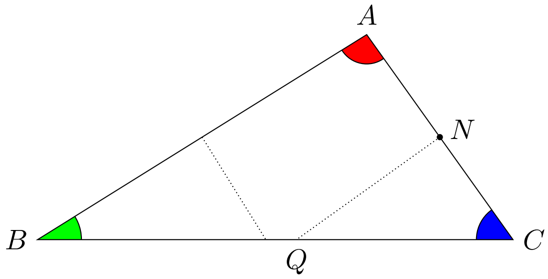
- Desdobre a folha, voltando a obter o triângulo ABC. Após desdobrar a folha, nela estará marcado o segmento MP perpendicular ao segmento AB, sendo M o ponto médio de AB.



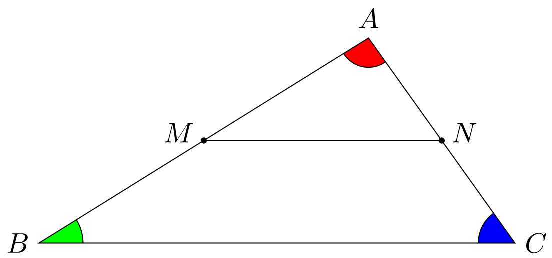
- De modo análogo, faça a dobra NQ de modo que o ponto C coincida com o ponto A, como está indicado na figura a seguir. Passando as pontas dos dedos sobre a dobra, faça um vinco marcando o segmento NQ.



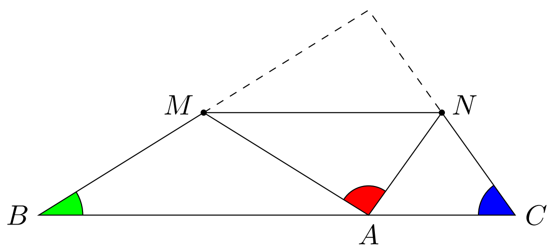
- Desdobre a folha, voltando a obter o triângulo ABC. Após desdobrar a folha, nela estará marcado o segmento NQ perpendicular ao segmento AC, sendo N o ponto médio de AC.



- Com o auxílio de uma régua, ligue os pontos M e N, como está ilustrado na figura a seguir.

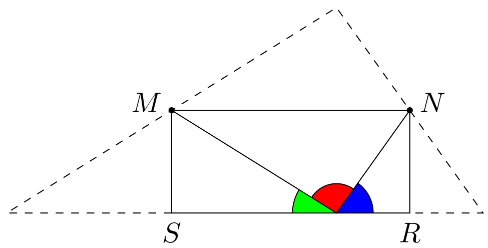


- Dobre o seu triângulo sobre o segmento MN fazendo o ponto A se apoiar sobre o segmento BC. Fazendo isso, você vai obter uma figura como a seguir.



- Agora faça a dobra MS fazendo o ponto B coincidir com A. Em seguida faça a dobra NR, fazendo o ponto C coincidir com o ponto A. Você vai obter um retângulo $MNRS$ como o que está ilustrado a seguir.

"geometria˙diagra
2015/7/22
page 24
Estilo OBMEP



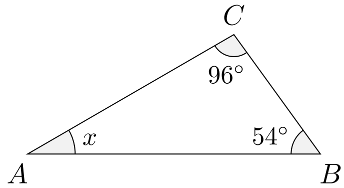
- Observe que os três ângulos do triângulo se juntaram formando ângulos adjacentes cuja soma é igual a um ângulo raso. Isto indica que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Enunciando formalmente, a atividade anterior sugere o seguinte teorema que será demonstrado no próximo encontro presencial.

Teorema: *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a* 180°.

Vamos utilizar agora este resultado na solução de alguns exemplos.

Exemplo 1: Determine a medida do ângulo x do triângulo ABC da figura a seguir.

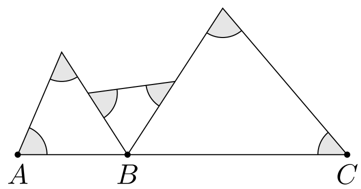


Solução. Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180°, temos uma relação entre as três medidas destes ângulos. Daí, se são conhecidos dois ângulos de um triângulo, sempre é possível determinar a medida do terceiro ângulo. No caso deste exemplo, podemos escrever a igualdade $x + 54° + 96° = 180°$. Daí $x = 180° - 54° - 96° \Rightarrow x = 30°$.

Exemplo 2: Cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero mede 60°.

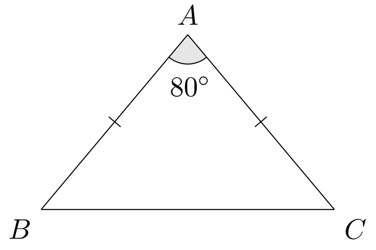
Solução. Com efeito, seja x a medida de cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero. Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180°, temos que $x + x + x = 180°$ e, portanto, $x = \dfrac{180°}{3} = 60°$.

Exemplo 3: (OBMEP 2014 – N2Q3 – 1ª fase) Na figura, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



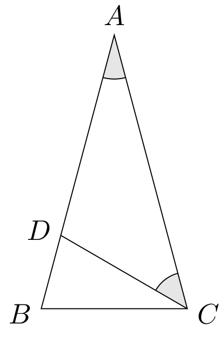
Solução. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Observe que os três ângulos não marcados dos triângulos (com vértices em B) somam 180°, já que A, B e C estão alinhados. Para calcular a soma dos ângulos marcados podemos somar os ângulos internos dos três triângulos e, do valor desta soma, podemos subtrair 180°, que é a soma dos ângulos no vértice B. Assim, a soma dos ângulos marcados é $(180° \times 3) - 180° = 360°$.

Exemplo 4: Na figura a seguir vemos um triângulo isósceles de base BC. Se $C\hat{A}B = 80°$, calcule a medida dos ângulos da base deste triângulo isósceles.



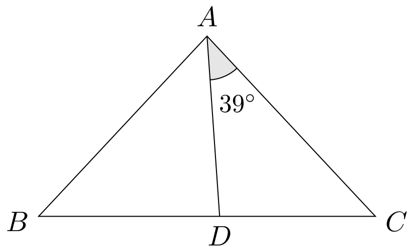
Solução. Sabemos que em um triângulo isósceles os dois ângulos da base possuem a mesma medida. Se α é a medida dos ângulos da base deste triângulo isósceles, então $\alpha + \alpha + 80° = 180°$. Daí, $2\alpha = 100°$ donde $\alpha = 50°$.

Exemplo 5: (OBMEP 2005 – N2Q15 – 1ª fase) O triângulo ABC é isósceles de base BC e o ângulo $B\hat{A}C$ mede 30°. O triângulo BCD é isósceles de base BD. Determine a medida do ângulo $D\hat{C}A$.

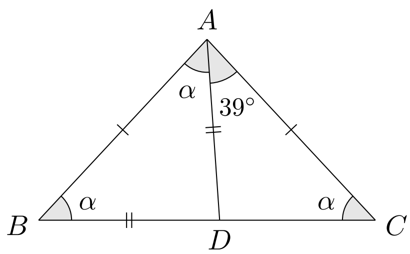


Solução. Sabemos que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Como o ângulo $\hat{A}$ do triângulo ABC mede 30°, a soma das medidas dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ é $180° - 30° = 150°$. Por outro lado, como o triângulo é isósceles de base BC, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são iguais, logo cada um deles mede $150° \div 2 = 75°$. Como o triângulo BCD é isósceles de base BD, temos $B\hat{D}C = C\hat{B}D = 75°$. O mesmo raciocínio usado acima mostra que $D\hat{C}B = 180° - 2 \cdot 75° = 30°$. Segue que $D\hat{C}A = A\hat{C}B - D\hat{C}B = 75° - 30° = 45°$.

Exemplo 6: (Banco de Questões 2009 – Nível 1 – Lista 8 – Exercício 6) Encontre a medida do ângulo $B\hat{A}D$, sabendo que $D\hat{A}C = 39°$, $AB = AC$ e $AD = BD$.

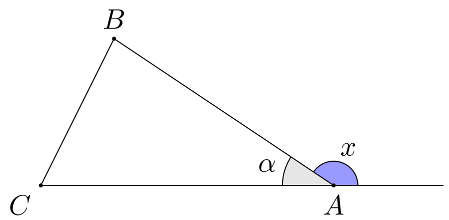


Solução. Como $AB = AC$, o triângulo ABC é isósceles, logo $A\hat{B}C = A\hat{C}B$. Sento $AD = BD$ o triângulo ABD também é isósceles, logo $A\hat{B}D = B\hat{A}D$. Temos então $A\hat{B}C = A\hat{C}B = B\hat{A}D$. Na figura a seguir, estes três ângulos iguais estão representados pela letra α. Os ângulos internos do triângulo ABC são $\alpha + 39°$, α e α. Somando estes ângulos obtemos $\alpha + 39° + \alpha + \alpha = 180° \;\Rightarrow\; 3\alpha = 180° - 39° = 141° \;\Rightarrow$ Assim $\alpha = 47°$.

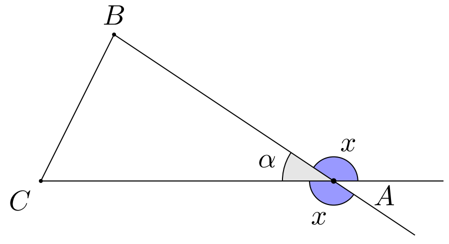


Ângulo externo

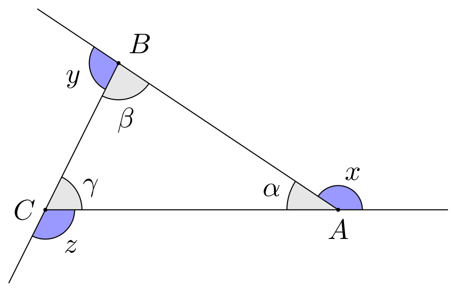
Nos exemplos anteriores exploramos a definição de ângulo interno e o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo. Vejamos agora que um triângulo também possui ângulos externos. De fato, seja ABC um triângulo com ângulo interno α no vértice A. Em cada vértice do triângulo um **ângulo externo** é o ângulo formado entre um lado e o prolongamento do outro lado do triângulo que chega neste vértice. Na figura a seguir, por exemplo, x é ângulo externo no vértice A. Ele é o ângulo formado pelo lado AB e pelo prolongamento do lado AC.



Observe que em cada vértice de um triângulo existem dois ângulos externos. Por exemplo, no vértice A do triângulo ABC podemos considerar o ângulo formado entre o lado AB e o prolongamento do lado AC, mas também podemos considerar o ângulo formado pelo lado AC e pelo prolongamento do lado AB. Estes dois ângulos externos são opostos pelo vértice e possuem, portanto, a mesma medida. Na figura a seguir vemos os dois ângulos externos x no vértice A.



Considere agora um triângulo ABC com ângulos internos α, β e γ. Sejam x, y e z os ângulos externos desse triângulo nos vértices A, B e C (veja figura a seguir). A respeito do conceito de ângulo externo é importante observar as seguintes propriedades: (estude a definição de ângulo externo e estude explicações sobre estas propriedades no vídeo 18).



- Um ângulo externo é o suplementar do seu ângulo interno adjacente. Por exemplo, na figura anterior α é ângulo interno e x é o seu ângulo externo adjacente. A soma $\alpha + x$ é um ângulo raso e, portanto, esses ângulos são suplementares.

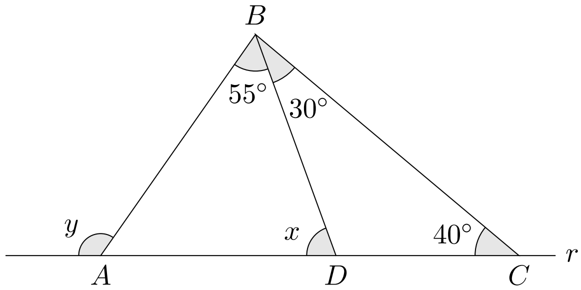
- Um ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. De fato, utilizando a nomenclatura da figura anterior temos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ e que $\alpha + x = 180°$. Daí $\beta + \gamma = 180° - \alpha = x$ e, portanto, o ângulo externo x é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes β e γ.

- A soma dos ângulos externos de um triângulo é 360°. De fato, utilizando as propriedades anteriores e a notação da figura anterior temos que $x = 180° - \alpha$, $y = 180° - \beta$ e $z = 180° - \gamma$. Daí a soma dos ângulos externos é

$$\begin{aligned} x + y + z &= (180° - \alpha) + (180° - \beta) + (180° - \gamma) \\ &= 540° - (\alpha + \beta + \gamma) = 540° - 180° = 360°. \end{aligned}$$

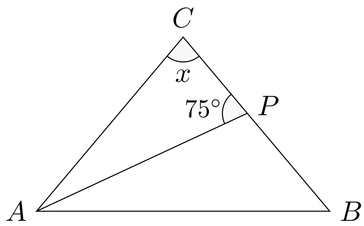
Vamos ver agora alguns exemplos de problemas resolvidos com o conceito de ângulo externo.

Exemplo 7: Na figura a seguir os pontos A, D e C pertencem à reta r. Determine x e y.

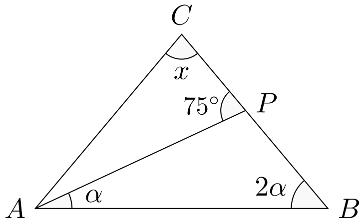


Solução. O ângulo x é ângulo externo do triângulo BCD não adjacente aos ângulos internos de 30° e de 40°. Daí $x = 30°+40° = 70°$. Do mesmo modo, y é ângulo externo do triângulo ABD não adjacente aos ângulos internos de 55° e de $x = 70°$. Daí $y = 55° + x = 55° + 70° = 125°$.

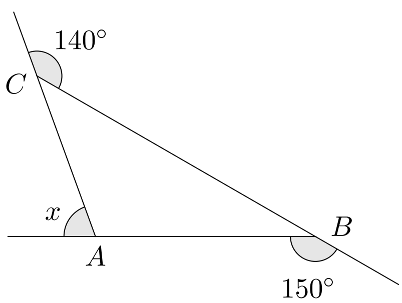
Exemplo 8: Na figura a seguir, ABC é um triângulo isósceles de base AB e o segmento AP está sobre a reta bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$. Se $A\hat{P}C = 75°$, determine a medida do ângulo x.



Solução. Seja 2α a medida do ângulo da base do triângulo ABC. Daí $P\hat{A}B = \alpha$ e $P\hat{B}A = 2\alpha$. No triângulo PAB o ângulo de 75° é ângulo externo não adjacente aos ângulos internos de medidas α e 2α. Daí $\alpha+2\alpha = 75°$ e, portanto, $\alpha = 25°$. Logo o triângulo ABC possui ângulos de $50°$ na sua base. Como a soma dos ângulos internos do triângulo ABC deve ser igual a $180°$, concluímos que $x = 180° - 50° - 50° = 80°$.

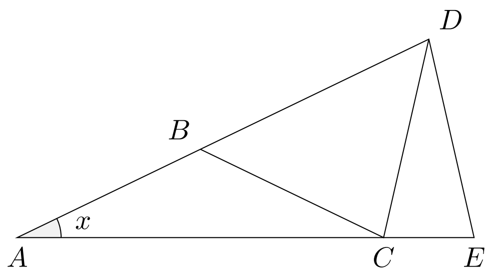


Exemplo 9: Dados os ângulos externos de $140°$ e $150°$ do triângulo ABC, calcule o ângulo externo x.



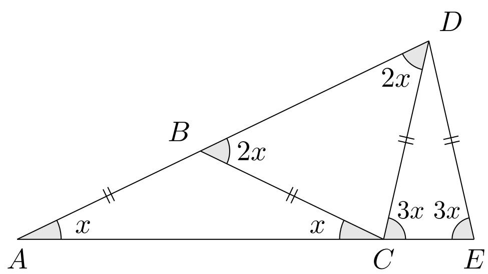
Solução. Sabemos que a soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é igual a $360°$. Daí podemos concluir que $x + 140° + 150° = 360°$ e daí $x = 70°$.

Exemplo 10: Na figura a seguir, ADE é um triângulo isósceles de base DE. Além disso, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$. Calcule a medida do ângulo $x = D\hat{A}E$.



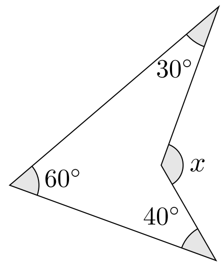
Solução.

- Como o triângulo ABC é isósceles, $A\hat{C}B = x$.
- Como o ângulo $D\hat{B}C$ é ângulo externo do triângulo ABC ele é a soma dos ângulos internos não adjacentes. Portanto, $D\hat{B}C = x + x = 2x$.
- Como o triângulo DBC é isósceles, $B\hat{D}C = 2x$.
- Como o ângulo $D\hat{C}E$ é ângulo externo do triângulo DAC ele é a soma dos ângulos internos não adjacentes e, portanto, $D\hat{C}E = x + 2x = 3x$.
- Como o triângulo DCE é isósceles, $D\hat{E}C = 3x$.
- Como o triângulo ADE é isósceles, $A\hat{D}E = A\hat{E}D = 3x$. Daí podemos concluir que $C\hat{D}E = x$.

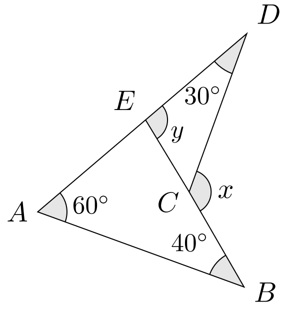


- Somando os ângulos internos do triângulo ADE obtemos $x+3x+3x = 180°$. Daí segue que $7x = 180°$ ou seja $x = \dfrac{180°}{7} \simeq 25,7°$.

Exemplo 11: Dados os ângulos da figura, determine a medida do ângulo x.



Solução. Vamos denotar por A, B, C e D os vértices do quadrilátero da figura dada. Prolongando o lado BC, como ilustrado a seguir, formamos o ângulo y que é ângulo externo do triângulo ABE não adjacente aos ângulos internos de $60°$ e de $40°$. Daí $y = 60° + 40° = 100°$. Considerando o triângulo CDE, x é ângulo externo não adjacente aos ângulos internos de $30°$ e de $y = 100°$. Daí $x = 30° + 100° = 130°$.

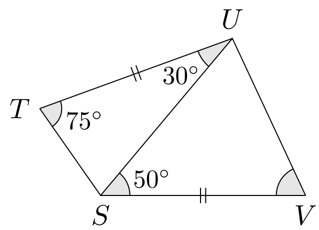


Portanto, x é igual a soma dos três ângulos internos dados, ou seja, $x = 30° + 40° + 60°$.

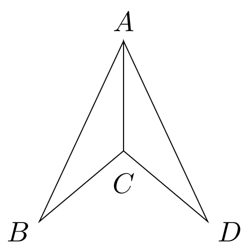
Exercícios:

1. Mostre que um triângulo possui no máximo um ângulo obtuso.

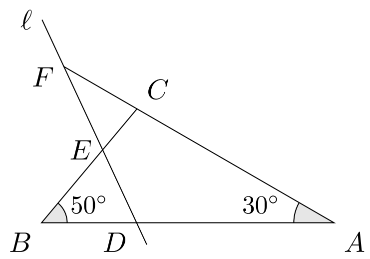
2. (Banco de Questões 2010 – Nível 2 – questão 69) Na figura dada, $TU = SV$. Quanto vale o ângulo $S\hat{V}U$, em graus?



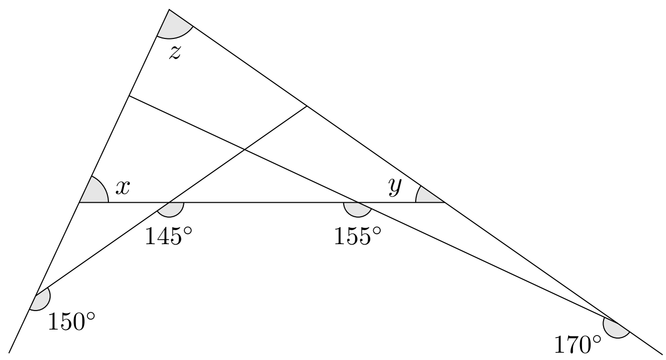
3. (Banco de Questões 2011 – Nível 1 – questão 13) Na figura a seguir temos dois triângulos, ABC e ADC tais que $AB = AD$ e $CB = CD = CA$. Sabendo que $C\hat{B}A = 25°$ determine a medida do ângulo $B\hat{C}D$.



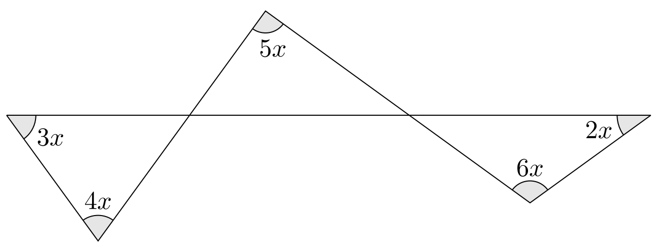
4. (Banco de Questões 2011 – Nível 2 – questão 18) Seja ABC um triângulo com $B\hat{A}C = 30°$ e $A\hat{B}C = 50°$. A reta ℓ corta os lados AB, BC e o prolongamento de AC em D, E e F, respectivamente. Se o triângulo DBE é isósceles, quais são as três possíveis medidas para o ângulo $C\hat{F}E$?



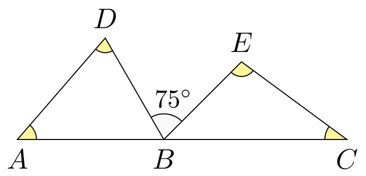
5. Dados os ângulos 150°, 145°, 155° e 170° indicados na figura, determine as medidas dos ângulos x, y e z.



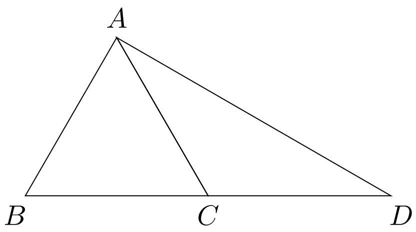
6. (Banco de Questões 2010 – Nível 2 – questão 37) Na figura estão indicadas, em graus, as medidas de alguns ângulos em função de x. Quanto vale x?



7. Na figura a seguir os pontos A, B e C estão alinhados e $D\hat{B}E = 75°$. Calcule a soma dos ângulos $\hat{A} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{C}$.



8. Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero e o triângulo ACD é isósceles. Determine o menor ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{A}D$.



9. (Banco de Questões 2010 – Nível 2 – questão 8) Na figura, temos $\hat{B} = 50°$, sendo AD e CD as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ do triângulo ABC, respectivamente. Qual é a medida do ângulo $A\hat{D}C$?