Módulo de Áreas de Figuras Planas

Áreas de Figuras Planas: Mais alguns Resultados

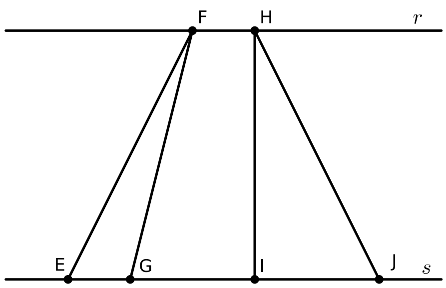
Nono Ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Áreas de Figuras Planas: Mais alguns Resultados

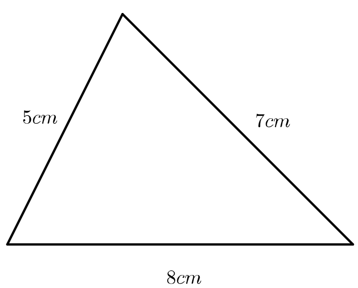
1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. No desenho abaixo, as retas r e s são paralelas. Se o segmento IJ é o dobro do segmento EG, determine a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle FEG$ e $\triangle HIJ$.

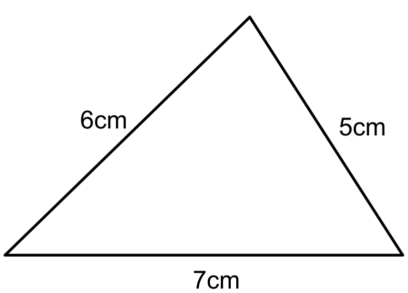


Exercício 2. A fórmula de Heron afirma que a área de um triângulo de lados a, b e c é dada por $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Calcule a área dos triângulos abaixo.

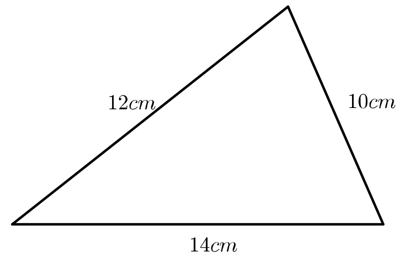
a)



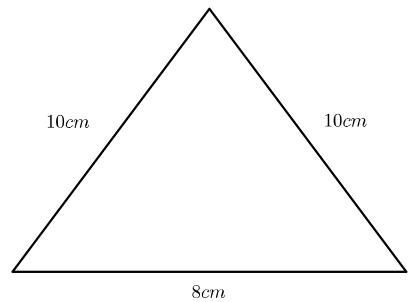
b)



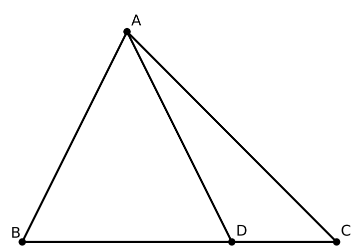
c)



d)



Exercício 3. No desenho abaixo, a área do triângulo $\triangle ABD$ é $30m^2$ e a área do triângulo $\triangle ADC$ é $10m^2$. Determine a razão entre os segmentos BD e DC.

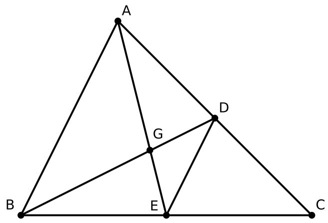


Exercício 4. No desenho abaixo, E e D são os pontos médios dos lados BC e AC do triângulo $\triangle ABC$.

a) Encontre a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BED$.

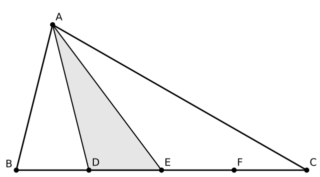
b) Encontre a razão entre os segmentos AG e GE.

Observação: O ponto G é chamado de Baricentro do Triângulo ABC. Como consequência deste exercício, podemos concluir que o Baricentro divide cada mediana em dois segmentos na razão $2:1$.

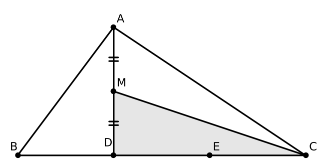


Exercício 5. Em cada um dos itens abaixo, a área do triângulo ABC vale $36m^2$. Determine a área de cada região sombreada sabendo que os pontos marcados nos lados o dividem em partes iguais.

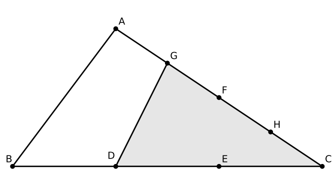
a)



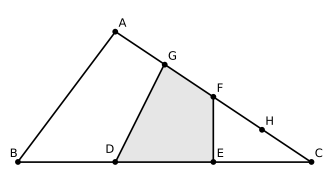
b)



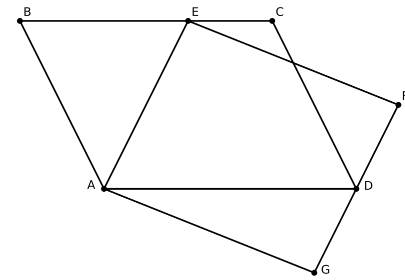
c)



d)

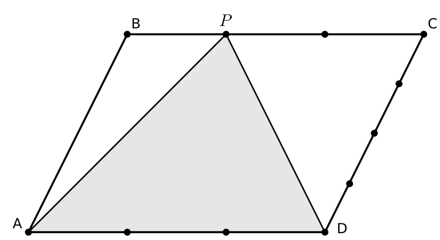


Exercício 6. No desenho abaixo, $ABCD$ e $AEFG$ são paralelogramos. Se a área de $ABCD$ é $20cm^2$, determine a área do paralelogramo $EFGA$.

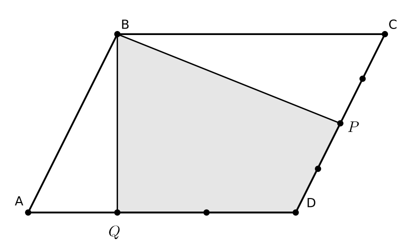


Exercício 7. Nos desenhos abaixo, o paralelogramo $ABCD$ possui área $24cm^2$ e os pontos marcados nos lados o dividem em partes iguais. Determine a área das regiões sombreadas.

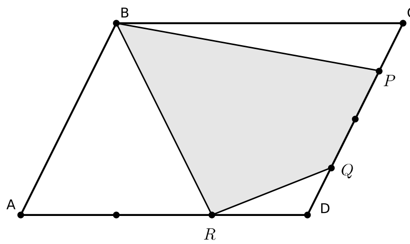
a)



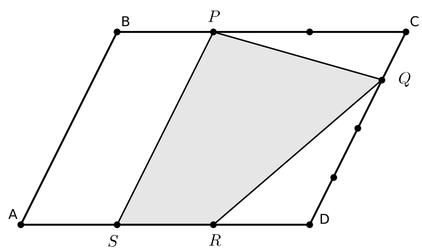
b)



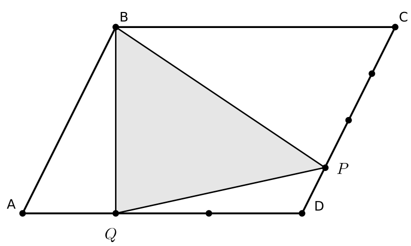
c)



d)



e)

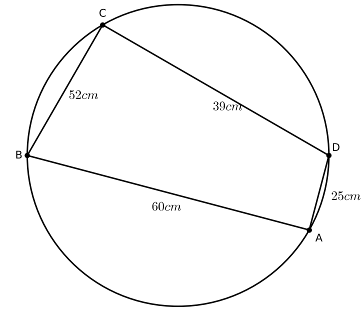


2 Exercícios de Fixação

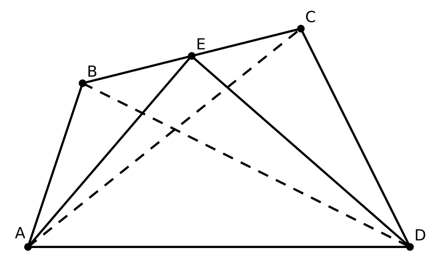
Exercício 8. Calcule a área de um triângulo cujos lados medem $13cm$, $14cm$ e $15cm$.

Exercício 9. No triângulo ABC, $AC = 5$ e $AB = 6$. Seja P um ponto sobre a bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$. Se a área de APB é $3/2$, a área de APC é:
a) $5/4$ b) $9/5$ c) $\sqrt{3}/4$ d) $\sqrt{5}/4$ e) $4/5$

Exercício 10. A área de um quadrilátero inscritível em um círculo e que possui lados a, b, c e d é $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ onde $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$. No quadrilátero do desenho abaixo, determine a sua área.



Exercício 11. No desenho abaixo, E é o ponto médio do lado BC. Se as áreas dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ACD$ são 20 e 30, determine a área do triângulo $\triangle AED$.



Exercício 12. Seja $ABCD$ um trapézio de bases $AB = 10$ e $CD = 6$. A altura mede 4. Sejam P o ponto médio do lado AD e Q o ponto médio do lado PB. Encontre a área do triângulo PQC.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Seja $\triangle ABC$ um triângulo com lados de medidas a, b e c. Se h_a é o comprimento da altura relativa ao vértice A e $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, verifique que:

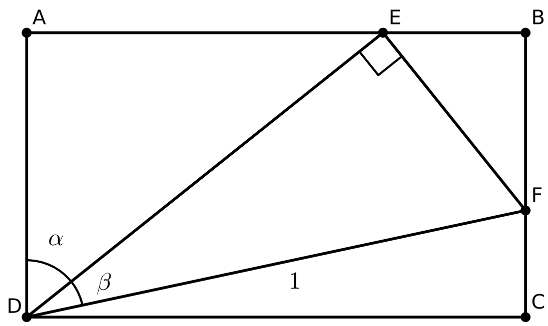
a) $h_a = \sqrt{p(p-a)} \cdot \dfrac{2\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}$.

b) $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$

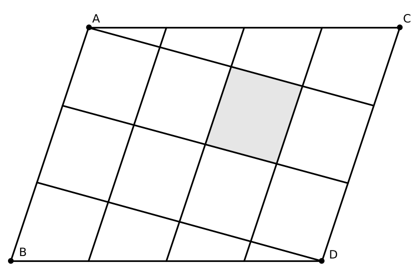
Exercício 14. Na figura abaixo, $\triangle DEF$ é um triângulo retângulo com $\angle DEF = 90°$ e $DF = 1$. Se $\angle FDE = \beta$ e $\angle ADE = \alpha$:

a) Encontre as medidas dos segmentos AE, EB e DC;

b) Mostre que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$



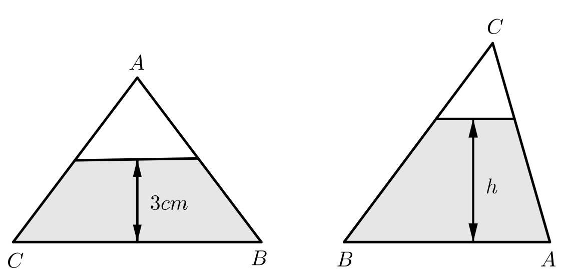
Exercício 15. Os lados AC e BD do paralelogramo $ABCD$ foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados AB e CD foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo. Se a área de $ABCD$ é 84, determine a área sombreada.



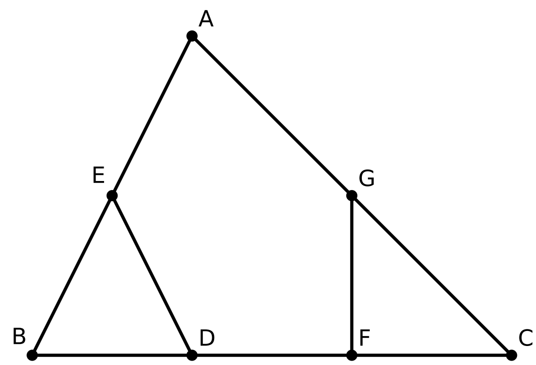
a) 1 b) 3 c) 4 d) 7
e) 12

Exercício 16. Um peso de papel tem a forma de um triângulo de lados $BC = 6$ cm e $AB = AC = 5$ cm e está parcialmente preenchido com água. Quando o peso de papel se apoia sobre o lado BC, a água tem uma altura de 3 cm. Qual é a altura da água, em cm, quando o peso de papel se apoia sobre o lado AB?

a) $\dfrac{4}{3}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{8}{5}$ d) $\dfrac{18}{5}$ e) $\dfrac{24}{5}$

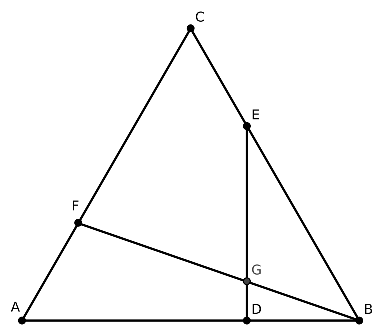


Exercício 17. Na figura ao lado, E é o ponto médio de AB, G é o ponto médio de AC e $BD = DF = FC$. Se a área do triângulo ABC é 252, qual é a área do pentágono $AEDFG$?



a) 168 b) 189 c) 200 d) 210 e) 220

Exercício 18. No desenho abaixo, o $\triangle ABC$ é equilátero e $BD = CE = AF = \dfrac{AB}{3}$. Determine a razão $\dfrac{EG}{GD}$.



Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. Seja h a distância entre as duas retas. Este também é o valor da altura dos triângulos $\triangle EFG$ e $\triangle HIJ$. Assim

$$\begin{aligned}\frac{[EFG]}{[HIJ]} &= \frac{h\cdot EG/2}{h\cdot IJ/2}\\ &= \frac{EG}{IJ}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2.

a) Como o semiperímetro mede $10cm$, temos $A = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = 10\sqrt{3}cm^2$.

b) Como o semiperímetro mede $9cm$, temos $A = \sqrt{9(9-6)(9-5)(9-7)} = 6\sqrt{6}cm^2$.

c) Como o semiperímetro mede $18cm$, temos $A = \sqrt{18(18-12)(18-10)(18-14)} = 24\sqrt{6}cm^2$.

d) Como o semiperímetro mede $9cm$, temos $A = \sqrt{14(14-10)(14-10)(14-8)} = 8\sqrt{21}cm^2$.

3. Se h é a altura relativa ao lado BC, temos $30 = \dfrac{BD\cdot h}{2}$ e $10 = \dfrac{DC\cdot h}{2}$. Portanto,

$$3 = \frac{30}{10} = \frac{BD\cdot h}{DC\cdot h} = \frac{BD}{DC}.$$

4.

a) Como D é ponto médio de AC, segue que $[ABD] = [BDC] = [ABC]/2$. Além disso, como E é ponto médio de BC, seque que $[BED] = [BDC]/2 = [ABC]/4$.

b) Considere os triângulos da figura de bases AG e GE, assim

$$\frac{AG}{GE} = \frac{[AGD]}{[GDE]} = \frac{[ABG]}{[BGE]}$$

Consequentemente, usando propriedades de proporções, temos:

$$\begin{aligned}\frac{AG}{GE} &= \frac{[AGD]+[ABG]}{[GDE]+[BGE]}\\ &= \frac{[ABD]}{[BDE]}\\ &= \frac{[ABC]/2}{[ABC]/4}\\ &= 2.\end{aligned}$$

5. a) Os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ possuem mesma altura mas a razão entre suas bases é $\dfrac{1}{4}$. Portanto, $[ADE] = \dfrac{1}{4}\cdot[ABC] = 9cm^2$.

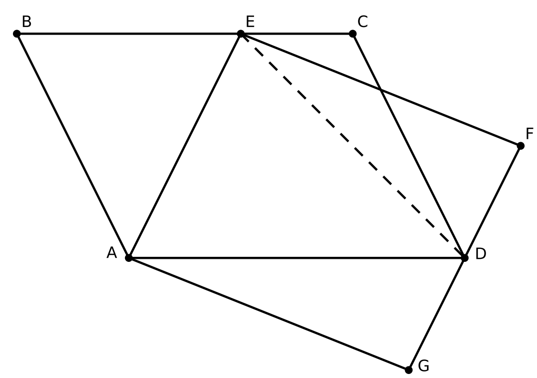
b) Como $DC = \dfrac{2}{3}\cdot BC$, temos $[ADC] = \dfrac{2}{3}\cdot[ABC] = 24cm^2$.Como M é o ponto médio de AD, as áreas dos triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle MDC$ são iguais e valem metade da área do $\triangle ADC$. Portanto, $[MDC] = 12cm^2$.

c) Como $DC = \dfrac{2}{3}\cdot BC$, temos $[ADC] = \dfrac{2}{3}\cdot[ABC] = 24cm^2$. Além disso, como $GC = \dfrac{3}{4}\cdot AC$, segue que $[GDC] = \dfrac{3}{4}\cdot[ADC] = \dfrac{3}{4}\cdot 24 = 18cm^2$.

d) Em virtude do item anterior, $[GDC] = 18cm^2$. Como E é ponto médio de DC, segue que $[GDE] = [GEC] = 9$. Também temos $GF = \dfrac{1}{3}\cdot GC$ e daí $[GEF] = \dfrac{1}{3}\cdot[GEC] = \dfrac{1}{3}\cdot 9 = 3cm^2$. Portanto,

$$[GDEC] = [GDE] + [GEF] = 9 + 3 = 12cm^2.$$

6. Trace o segmento ED. O triângulo EAD possui metade da área do paralelogramo $ABCD$ pois possui a mesma base e a mesma altura. Pelo mesmo argumento, também possui metade da área do paralelogramo $EFGA$. Assim, as áreas de ambos paralelogramos são iguais a $20cm^2$.



7.

a) O triângulo sombreado possui a mesma base e altura que o paralelogramo dado. Portanto, sua área vale $\dfrac{24}{2} = 12cm^2$.

b) Como $AQ = \dfrac{AD}{3}$ e $PC = \dfrac{CD}{2}$, segue que $[ABQ] = \dfrac{[ABD]}{3}$ e $[BCP] = \dfrac{[BDC]}{2}$. Portanto, como a diagonal BD divide o paralelogramo em dois triângulos de mesma área, temos

$$\begin{aligned}[BQDP] &= [ABCD] - \frac{[ABD]}{3} - \frac{[BDC]}{2}\\ &= [ABCD] - \frac{[ABCD]}{6} - \frac{[ABCD]}{4}\\ &= 14cm^2\end{aligned}$$

c) Temos $[BAR] = \dfrac{2[ABD]}{3} = 8cm^2$ e $[BPC] = \dfrac{[BDC]}{4} = 3cm^2$. Além disso,

$$[RDQ] = \frac{[AQD]}{3} = \frac{[ACD]}{12} = 1cm^2.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}[BPQR] &= [ABCD] - [ABR] - [BPC] - [RQD]\\ &= 24 - 8 - 3 - 1\\ &= 12cm^2.\end{aligned}$$

d) O paralelogramo $ABCD$ pode ser dividido em três paralelogramos congruentes à $BPSA$. Como sua área vale 24, a área do paralelogramo $PCDS$ vale $16cm^2$. Além disso, $[PQC] = \dfrac{[PDC]}{3} = \dfrac{8}{3}$ e $[RQD] = \dfrac{[SQD]}{2} = 3$. Portanto, $[PQRS] = [PCDS] - [PCQ] - [QDR] = 16 - \dfrac{8}{3} - 3 = \dfrac{31}{13}$.

e) Temos $[ABQ] = \dfrac{[ABD]}{4} = 3cm^2$ e $[BCP] = \dfrac{3[BCD]}{4} = 9cm^2$. Além disso, $[PQD] = \dfrac{2[APD]}{3} = 2cm^2$. Portanto,

$$\begin{aligned}[BPQ] &= [ABCD] - [BCP] - [PDQ] - [ABQ]\\ &= 24 - 9 - 2 - 3\\ &= 10cm^2.\end{aligned}$$

2 Exercícios de Fixação

8. Como o semiperímetro mede $21cm$, portanto, $A = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84cm^2$.

9. (Extraído da OBM 2014) Sendo Q o ponto de intersecção da bissetriz de $\angle BAC$ com o lado BC, temos que, pelo Teorema da Bissetriz Interna, $\dfrac{5}{CQ} = \dfrac{6}{BQ}$, ou seja, $\dfrac{BQ}{CQ} = \dfrac{6}{5}$. Temos também que

$$\begin{aligned}\frac{BQ}{CQ} &= \frac{[ABQ]}{[ACQ]}\\ &= \frac{[BPQ]}{[CPQ]}\\ &= \frac{[ABQ]-[BPQ]}{[ACQ]-[CPQ]}\\ &= \frac{[ABP]}{[ACP]}\\ &= \frac{\frac{3}{2}}{[APC]} = \frac{6}{5}\end{aligned}$$

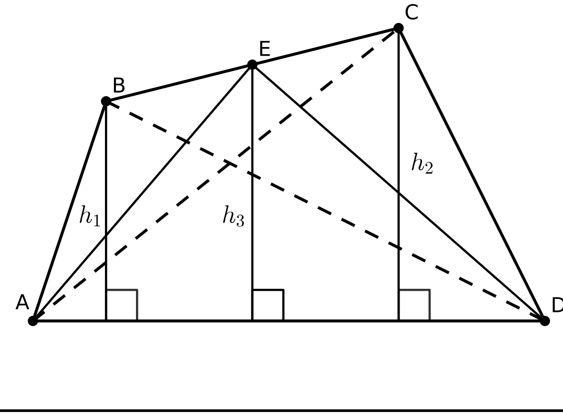
Assim, $[APC] = 5/4$. Resposta A.

10. Pela fórmula de Brahmagupta, sua área é dada por:

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\\ &= \sqrt{(88-39)(88-25)(88-60)(88-52)}\\ &= \sqrt{49\cdot 63\cdot 28\cdot 36}\\ &= 1764.\end{aligned}$$

11. Sejam h_1, h_2 e h_3 as distâncias dos vértices B, E e C ao lado AD, respectivamente. Como E é ponto médio de BC, temos $h_3 = \dfrac{h_1+h_2}{2}$. Assim

$$\begin{aligned}[EAD] &= \frac{h_3\cdot AD}{2}\\ &= \frac{(h_1+h_2)AD}{4}\\ &= \frac{h_1\cdot AD}{4} + \frac{h_2\cdot AD}{4}\\ &= \frac{[ABD]}{2} + \frac{[ACD]}{2}\\ &= 10+15\\ &= 25.\end{aligned}$$



12. Pelo exercício anterior,

$$\begin{aligned}[PCB] &= \frac{[DCB]}{2}+\frac{[ACB]}{2}\\ &= \frac{6\cdot 4}{4}+\frac{10\cdot 4}{4}\\ &= 6+10\\ &= 16cm^2.\end{aligned}$$

Como Q é o ponto médio de PB, segue que $[PQC] = \frac{[PCB]}{2} = 8cm^2$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

13.

a) Pela fórmula de Heron, temos:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = [ABC] = \frac{a\cdot h_a}{2}$$

Consequentemente, $h_a = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$.

b) Sejam $x = p-b$ e $y = p-c$. Daí, como $(x-y)^2 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}x^2-2xy+y^2 &\geq 0\\ x^2+y^2 &\geq 2xy\\ x^2+2xy+x^2 &\geq 4xy\\ x+y &\geq 2\sqrt{xy}.\end{aligned}$$

Como $x+y = 2p-b-c = a$, temos

$$\begin{aligned}h_a &= \sqrt{p(p-a)}\cdot\frac{2\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}\\ &\leq \sqrt{p(p-a)}\cdot\frac{a}{a}\\ &= \sqrt{p(p-a)}.\end{aligned}$$

Observação: Neste item, demonstramos também a desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica para dois termos:

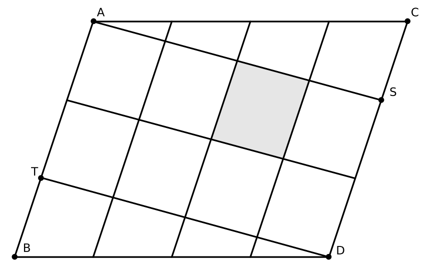
$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \text{ se } x,y\geq 0.$$

14.

a) Como $DF = 1$, segue que $DE = DF\cos\beta = \cos\beta$ e $EF = DF\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\beta$. Além disso, dado que $\angle ADE = \alpha$, obtemos $\angle BEF = 90^\circ - \alpha$. Assim, $AE = DE\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ e $EB = EF\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$. Como $\angle FDC = 90^\circ-\alpha-\beta$, segue que $DC = DF\cos(90^\circ-\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta)$.

b) Como $AE+EB = AB = DC$, substituindo os valores encontrados no item anterior, obtemos o resultado desejado.

15. (Extraído da OBM 2012) Considerando o paralelogramo $ASDT$, como $AT = \frac{2AB}{3}$, temos que a área de $ASDT$ é igual a $\frac{2}{3}\cdot 84 = 56$. Este paralelogramo está dividido em oito paralelogramos iguais, sendo que a área sombreada é um destes paralelogramos e, portanto, a área desejada é $\frac{1}{8}\cdot 56 = 7$.



16. (Extraído da OBM 2011) Seja M o ponto médio de BC. Então, como ABC é isósceles com $AB = AC$ o segmento AM é também altura do triângulo. Logo

$$AM = \sqrt{AB^2-BM^2} = \sqrt{5^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2} = 4.$$

Como a altura da água é 3, o nível da água é igual a $\frac{3}{4}$ da altura do triângulo. Como os triângulos pequenos brancos formados pelos espaços são semelhantes ao triângulo original com a mesma razão de semelhança (raiz quadrada da razão entre as áreas, que é a mesma), a altura h é igual a $\frac{3}{4}$ da altura relativa H a B. Sendo a área de ABC igual a $\frac{6\cdot 4}{2} = 12cm^2$, temos

$$\begin{aligned}\frac{AC\cdot H}{2} &= 12\\ 5H &= 24\\ H &= \frac{24}{5}.\end{aligned}$$

Portanto, $h = \frac{3}{4}H = \frac{3}{4}\cdot\frac{24}{5} = \frac{18}{5}$ cm. Resposta D.

17. (Extraído da OBM 2009) Trace os segmentos AD e AF. Como $BD = DF = FC$, temos

$$[ABD] = [ADF] = [AFC] = \frac{252}{3}.$$

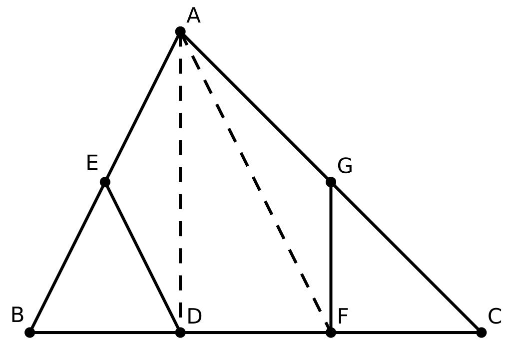
Além disso, como E é ponto médio de AB, obtemos:

$$[BDE] = \frac{[ABD]}{2} = \frac{252}{6}$$

Analogamente, como G é ponto médio de AC, $[GFC] = \dfrac{252}{6}$. Portanto,

$$[AEDFG] = [ABC] - [BDE] - [GFC] = \frac{2 \cdot 252}{3} = 168.$$

Resposta A.



18. (Extraído da OBM 2014) A razão EG/GD pode ser calculada através das razões de áreas:

$$\frac{EG}{GD} = \frac{[EGB]}{[GDB]} = \frac{[EFG]}{[FDG]} = \frac{[EGB]+[EFG]}{[GDB]+[FDG]} = \frac{[EFB]}{[FDB]}.$$

Além disso, temos:

$$\frac{[EFB]}{ABC} = \frac{[EFB]}{CFB} \cdot \frac{[CFB]}{[ABC]} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Analogamente,

$$\frac{[FBD]}{[ABC]} = \frac{1}{9}$$

Portanto

$$\frac{EG}{GD} = \frac{[EFB]}{[ABC]} \cdot \frac{[ABC]}{[FDB]} = \frac{4}{9} \cdot 9 = 4.$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com