Números Naturais – Representação, Operações e Divisibilidade

Múltiplos e Divisores

Tópicos Adicionais

Números Naturais – Representação, Operações e Divisibilidade
Múltiplos e Divisores

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o número pedido em cada um dos itens abaixo.

a) O próximo múltiplo de 5 maior que 10.

b) O próximo múltiplo de 7 maior que 14.

c) O próximo múltiplo de 9 maior que 18.

d) O próximo múltiplo de 11 maior que 33.

e) O próximo múltiplo de 13 maior que 39.

Exercício 2.

a) Determine o maior múltiplo de 5 menor que 12.

b) Determine o maior múltiplo de 7 menor que 16.

c) Determine o maior múltiplo de 9 menor que 20.

d) Determine o maior múltiplo de 11 menor que 36.

Exercício 3. Em cada um dos exercícios abaixo, determine o menor múltiplo positivo dos dois inteiros dados.

a) 7 e 19.

b) 7 e 13.

c) 5 e 23.

d) 5 e 17.

Exercício 4. Nos itens abaixo, determine o menor número primo maior que o inteiro dado.

(a) 20.

(b) 24.

(c) 28.

(d) 32.

Exercício 5. Em cada um dos itens abaixo, determine o maior divisor primo do inteiro dado.

a) 161?

b) 69?

c) 133?

d) 57?

Exercício 6.

a) Determine a quantidade de números primos do conjunto $\{30, 31, 32, 33, 34, 35\}$.

b) Determine a quantidade de números primos do conjunto $\{26, 27, 28, 29, 30, 31\}$.

Exercício 7. Para cada um conjuntos de inteiros positivos abaixo, determine o menor múltiplo comum deles.

a) 11, 77 e 55.

b) 7, 21 e 77.

c) 5, 10 e 55.

d) 3, 6 e 21.

Exercício 8. Determine o número de divisores de cada um dos inteiros abaixo

a) 36.

b) 324.

c) 500.

Exercício 9. a) Determine o número de divisores de 24×75.

b) Determine o número de divisores de 10×15.

Exercício 10. a) Determine o número máximo de fatores primos distintos de um número que possui 1500 divisores positivos.

b) Determine o número máximo de fatores primos distintos de um número que possui 60 divisores positivos.

Exercício 11. Determine a quantidade máxima de inteiros positivos maiores que 1 cujo produto é 1500. Dica: Lembre-se que todo inteiro maior que 1 possui pelo menos um fator primo como um de seus divisores.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 12. a) Determine o número de divisores ímpares de 24×75.

b) Determine o número de divisores ímpares de 400×15.

Exercício 13. a) Qual o múltiplo de 8 mais próximo de 2266?

b) Qual o múltiplo de 8 mais próximo de 2155?

c) Qual o múltiplo de 8 mais próximo de 1363?

Exercício 14. Determine o valor do algarismo x para o que o número de quatro algarismos $66x5$ seja múltiplo de 3 e 25

Exercício 15. Determine o valor do algarismo x para o que o número de quatro algarismos $65x5$ seja múltiplo de 3 e 25.

Exercício 16. Um inteiro e a soma dos seus algarismos sempre deixam o mesmo resto na divião por 9.

a) Qual o resto que o número 575 deixa na divisão por 9?

b) Qual o resto que o número 489 deixa na divisão por 9?

Exercício 17. Um inteiro e a soma dos seus algarismos sempre deixam o mesmo resto na divisão por 9. Qual o múltiplo de 9 mais próximo de 535?

Exercício 18. Segundo o critério de divisibilidade por 11 um número deixa o mesmo resto por 11 que a soma dos seus algarismos nas posições de ordem ímpar subtraída da soma de seus algarismos nas posições de ordem par. Por exemplo, como $3 + 4 - 6 = 1$ o número 364 deixa resto 1 na divisão por 11. Determine o resto de 140 na divisão por 11.

Exercício 19. Qual o múltiplo de 125 mais próximo de 7655?

Exercício 20. Qual o múltiplo de 8 mais próximo de 2209?

Exercício 21. Determine o menor valor do algarismo x de modo que o número de quatro algarismos $532x$ seja divisível por 7

Exercício 22. Qual o múltiplo de 125 mais próximo de 7655?

Exercício 23. Qual o múltiplo de 8 mais próximo de 2266?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 24. Encontre um número natural N que, ao ser dividido por 10, deixa resto 9, ao ser dividido por 9 deixa resto 8, e ao ser dividio por 8 deixa resto 7.

Exercício 25. Qual o resto de $n^3 + 2n$ na divisão por 3?

Exercício 26. Prove que, para cada n natural,

$$(n+1)(n+2)\dots(2n)$$

é divisível por 2^n.

Exercício 27. Cada um dos naturais a, b, c e d é divisível por $ab - cd$, que também é um número natural. Prove que $ab - cd = 1$.

Exercício 28. A soma digital $D(n)$ de um inteiro positivo n é definido recursivamente como segue:

$$D(n) = \begin{cases} n & se \;\; 1 \le n \le 9, \\ D(a_0 + a_1 + \dots + a_m) & se \;\; n > 9, \end{cases}$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_m$ são todos os dígitos da expressão decimal de n na base 10, i.e.,

$$n = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_1 10 + a_0$$

Por exemplo, $D(989) = D(26) = D(8) = 8$. Prove que: $D((1234)n) = D(n)$, para $n = 1, 2, 3 \dots$

Exercício 29. Prove que se $\dfrac{2^n - 2}{n}$ é um inteiro, então $\dfrac{2^{2^n-1} - 2}{2^n - 1}$ também é um inteiro.

Exercício 30. Qual é o maior inteiro n para o qual $n^3 + 100$ é divisível por $n + 10$?

Exercício 31. No planeta X, existem apenas dois tipos de notas de dinheiro: \$5 e \$78. É possível pagarmos exatamente \$7 por alguma mercadoria? E se as notas fossem de \$ 3 e \$ 78?

Exercício 32. Existe um bloco de 1000 inteiros consecutivos não contendo nenhum primo?

Exercício 33. É possível colocarmos 1995 números naturais ao redor de um círculo de modo que para quaisquer dois números vizinhos a razão entre o maior e o menor seja um número primo?

Exercício 34. Dados que $p, p + 10$ e $p + 14$ são números primos, encontre p.

Respostas e Soluções.

1.

a) Como $10 = 5 \times 2$ o próximo múltiplo é $5 \times 3 = 15$

b) Como $14 = 7 \times 2$ o próximo múltiplo é $7 \times 3 = 21$

c) Como $18 = 9 \times 2$ o próximo múltiplo é $9 \times 3 = 27$

d) Como $33 = 11 \times 3$ o próximo múltiplo é $11 \times 4 = 44$

e) Como $39 = 13 \times 3$ o próximo múltiplo é $13 \times 4 = 52$

2.

a) Como $12 = 5 \times 2 + 2$ o maior múltiplo é $5 \times 2 = 10$

b) Como $16 = 7 \times 2 + 2$ o maior múltiplo é $7 \times 2 = 14$

c) Como $20 = 9 \times 2 + 2$ o maior múltiplo é $9 \times 2 = 18$

d) Como $36 = 11 \times 3 + 3$ o maior múltiplo é $11 \times 3 = 33$

3.

a) Como 7 e 19 são números primos, o menor múltiplo positivo é $133 = 7 \times 19$.

b) Como 7 e 13 são números primos, o menor múltiplo positivo é $91 = 7 \times 13$.

c) Como 5 e 23 são números primos, o menor múltiplo positivo é $115 = 5 \times 23$.

d) Como 5 e 17 são números primos, o menor múltiplo positivo é $85 = 5 \times 17$.

4.

(a) O menor número primo maior que 20 é 23

(b) O menor número primo maior que 24 é 29

(c) O menor número primo maior que 28 é 29

(d) O menor número primo maior que 32 é 37

5.

a) Como $161 = 23 \times 7$, o maior divisor primo é 23.

b) Como $69 = 23 \times 3$, o maior divisor primo é 23.

c) Como $133 = 19 \times 7$, o maior divisor primo é 19.

d) Como $57 = 19 \times 3$, o maior divisor primo é 19.

6.

(a) O subconjunto dos números primos do conjunto mencionado é $\{31\}$. Portanto a quantidade de números primos é 1.

(b) O subconjunto dos números primos do conjunto mencionado é $\{29, 31\}$. Portanto a quantidade de números primos é 2.

7.

a) Como os últimos dois números são múltiplos do primeiro, temos $MMC(11, 77, 55) = MMC(77, 55) = 385$.

b) Como os últimos dois números são múltiplos do primeiro, temos $MMC(7, 21, 77) = MMC(21, 77) = 231$.

c) Como os últimos dois números são múltiplos do primeiro, temos $MMC(5, 10, 55) = MMC(10, 55) = 110$.

d) Como os últimos dois números são múltiplos do primeiro, temos $MMC(3, 6, 21) = MMC(6, 21) = 42$.

8.

(a) Analisando a fatoração do número dado, $36 = 2^2 3^2$, temos $(2 + 1)(2 + 1) = 9$ divisores.

(b) Analisando a fatoração do número dado, $324 = 2^2 3^4$, temos $(2 + 1)(4 + 1) = 15$ divisores.

(c) Analisando a fatoração do número dado, $500 = 2^2 5^3$, temos $(2 + 1)(3 + 1) = 12$ divisores.

9.

a) Como $24 \times 75 = 2^3 3^2 5^2$, temos $(3 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 36$ divisores.

b) Como $50 \times 75 = 2^1 5^4 3^1$, temos $(1 + 1)(4 + 1)(1 + 1) = 20$ divisores.

10.

a) Como $1500 = 2^2 3^1 5^3$, segue que tal número de divisores pode ser o produto de no máximo $2 + 1 + 3 = 6$ números maiores que 1. Portanto, o número máximo de fatores primos é 6

b) Como $60 = 2^2 3^1 5^1$, segue que tal número de divisores pode ser o produto de no máximo $2 + 1 + 1 = 4$ números maiores que 1. Portanto, o número máximo de fatores primos é 4

11. Como $1500 = 2^2 3^1 5^3$ e cada inteiro maior que 1 possui pelo menos um fator primo, segue que 1500 é o produto de no máximo $2 + 1 + 3 = 6$ números maiores que 1. Além disso, a única forma de escrever 1500 como produto de 6 números maiores que 1 é multiplicar os seus fatores primos (com a respectiva multiplicidade).

12.

a) Como $24 \times 75 = 2^3 3^2 5^2$, os seus divisores ímpares são exatamente os divisores de $3^2 5^2$. Assim, temos $(2 + 1)(2 + 1) = 9$ divisores.

b) Como $400 \times 15 = 2^4 5^3 3^1$, os seus divisores ímpares são exatamente os divisores de $5^3 3^1$. Assim, temos $(3 + 1)(1 + 1) = 8$ divisores.

13.

a) O múltiplo de 8 mais próximo do número formado pelos três últimos dígitos de 2266 é 264. Portanto, o número procurado é 2264.

b) O múltiplo de 8 mais próximo do número formado pelos três últimos dígitos de 2155 é 152. Portanto, o número procurado é 2152.

c) O múltiplo de 8 mais próximo do número formado pelos três últimos dígitos de 1363 é 360. Portanto, o número procurado é 1360.

14. Para que um número seja múltiplo de 3 a soma dos seus dígitos também deve ser um múltiplo de 3. Assim, os possíveis valores para x são 147. Como os dois últimos dígitos devem formar um múltiplo de 25, devemos ter $x = 7$.

15. Para que um número seja múltiplo de 3 a soma dos seus dígitos também deve ser um múltiplo de 3. Assim, os possíveis valores para x são 258. Como os dois últimos dígitos devem formar um múltiplo de 25, devemos ter $x = 2$.

16.

a) Como a soma dos dígitos é 17, o resto na divisão por 9 é 8

b) Como a soma dos dígitos é 21, o resto na divisão por 9 é 3

17. Como a soma dos dígitos é 13 o resto na divisão por 9 é 4. Portanto, o múltiplo de 9 mais próximo é o $535 - 4 = 531$.

18. A soma dos algarismos de ordem ímpar subtraída da soma dos algarismos de ordem par é -3. Portanto, o resto na divisão por 11 é 8.

19. O múltiplo de 125 mais próximo do número formado pelos três últimos dígitos de 7655 é 625. Portanto, o número procurado é 7625.

20. O múltiplo de 8 mais próximo do número formado pelos três últimos dígitos de 2209 é 208. Portanto, o número procurado é 2208.

21. Como 5320 é múltiplo de 7, basta que $532x - 5320 =$ seja também múltiplo de 7. Assim, $x = 7$

22. O múltiplo de 125 mais próximo do número formado pelos três últimos dígitos de 7655 é 625. Portanto, o número procurado é 7625.

23. O múltiplo de 8 mais próximo do número formado pelos três últimos dígitos de 2266 é 264. Portanto, o número procurado é 2264.

24. O que acontece ao somarmos 1 ao nosso número? Ele passa a deixar resto 0 na divisão por $10, 9$ e 8. Assim, um possível valor para N é $10 \cdot 9 \cdot 8 - 1$.

25. Se o resto de n por 3 é r, o resto de $n^3 + 2n$ é o mesmo de $r^3 + 2r$. Para $r = 0$, esse resto seria 0. Para $r = 1$, seria o mesmo resto de 3 que é 0. Finalmente, para $r = 2$, o resto seria o mesmo de $8 + 4 = 12$ que também é 0. Assim, não importa qual o resto de n por 3, o número $n^3 + 2n$ sempre deixará resto 0. Uma ideia importante nessa solução foi dividí-la em casos. Também poderíamos ter resolvido esse exemplo apelando para alguma fatoração:

$$n^3 + 2n = n^3 - n + 3n = n(n^2 - 1) + 3n = n(n-1)(n+1) + 3n.$$

Como $n - 1, n$ e $n + 1$ são consecutivos, um deles é múltiplo de 3. Assim, o último termo da igualdade anterior é a soma de dois múltiplos de 3 e consequentemente o resto procurado é 0.

26. Veja que

$$(n+1)(n+2)\ldots(2n) = \frac{1 \cdot 2 \cdots 2n}{1 \cdot 2 \cdots n}.$$

Para cada número natural k no produto escrito no denominador, temos uma aparição de $2k$ no produto escrito no numerador. Basta efetuarmos os cancelamentos obtendo:

$$(n+1)(n+2)\ldots(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1).$$

27. (Extraído da Olimpíada do Leningrado) Se chamarmos $p = ab - cd$, teremos $a = px, b = py, c = pz$ e $d = pt$ onde x, y, z e t são inteiros. Assim, $p = p^2(xy - zt)$. Consequentemente $1 = p(xy - zt)$ e concluímos que $p = 1$, pois p é natural.

28. Como $10^n - 1^n = (10-1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 1)$, podemos concluir que 10^n sempre deixa resto 1 na divisão por 9. Assim, $n = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, deixa o mesmo resto que $a_m + a_{m-1} + \ldots + a_0$ na divisão por 9. Desse modo, $D(n)$ nada mais é do que o resto na divisão por 9 do número n. Como 1234 deixa resto 1 por 9, o número $(1234)n$ deixa o mesmo resto que $1 \cdot n$ por 9, ou seja, $D((1234)n) = D(n)$.

29. (Extraído da Olimpíada Russa) Se $k = \dfrac{2^n - 2}{n}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{2^{2^n-1} - 2}{2^n - 1} &= \frac{2(2^{2^n-2} - 1)}{2^n - 1} \\
&= 2\left(\frac{2^{nk} - 1}{2^n - 1}\right) \\
&= 2\left(\frac{(2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 2^n + 1)}{2^n - 1}\right) \\
&= 2(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 2^n + 1),
\end{aligned}$$

é um número inteiro.

30. (Extraída da AIME) Para achar explicitamente o quociente de $n^3 + 100$ por $n + 10$ podemos fazer uso de alguma fatoração. Utilizaremos a soma dos cubos $n^3 + 10^3 = (n + 10)(n^2 - 10n + 100)$. Como,

$$n^3 + 100 = (n + 10)(n^2 - 10n + 100) - 900,$$

podemos concluir que o número 900 deve ser múltiplo de $n + 10$. O maior inteiro n para o qual $n + 10$ divide 900 é 890. Veja que se $n = 890$, o quociente da divisão de $n^3 + 100$ por $n + 10$ é $n^2 - 10n + 100 - 1 = 890^2 - 10 \cdot 890 + 99$.

31. Veja que $2 \times 78 - 31 \times 5 = 1$ e consequentemente $14 \times 78 - 217 \times 5 = 7$. Basta darmos 14 notas de de \$ 78 para recebermos 217 notas de \$ 5 como troco na compra de nossa mercadoria. Usando as notas de \$3 e \$78 não é possível pois o dinheiro pago e recebido como troco por algo sempre é múltiplo de 3 e 7 não é múltiplo de 3.

32. Sim. Um exemplo é o conjunto $1001! + 2, 1001! + 3, \ldots, 1001! + 1001$. Veja $i \mid 1001! + i$ para todo $i = 2, 3, \ldots, 1001$.

33. Não, é impossível. Suponha, por absurdo, que isso seja possível e denotemos por $a_0, a_1, \ldots, a_{1995} = a_0$ tais inteiros. Então, para $k = 1, \ldots, 1995$, $\frac{a_{k-1}}{a_k}$ é primo ou o inverso de um primo. Suponha que a primeira situação ocorra m vezes e a segunda ocorra $1995 - m$ vezes entre esses quocientes. Como o produto de todos os números da forma $\frac{a_{k-1}}{a_k}$, para $k = 1, \ldots, 1995$ é igual à 1, podemos concluir que o produto de m primos deve ser igual ao produto de $1995 - m$ primos. Em virtude da fatoração única, $m = 1995 - m$. Um absurdo pois 1995 é ímpar.

34. Vamos analisar os possíveis restos na divisão por 3 de p. Se p deixa resto 1, então $p + 14$ é um múltiplo de 3 maior que 3 e consequentemente não poderá ser um número primo. Se o resto é 2, então $p + 10$ é um múltiplo de 3 maior que 3 e também não poderá ser um número primo. Assim, o resto de p por 3 é 0 e consequentemente $p = 3$.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com