Encontro 14: Resolução de exercícios de contagem

Exercícios

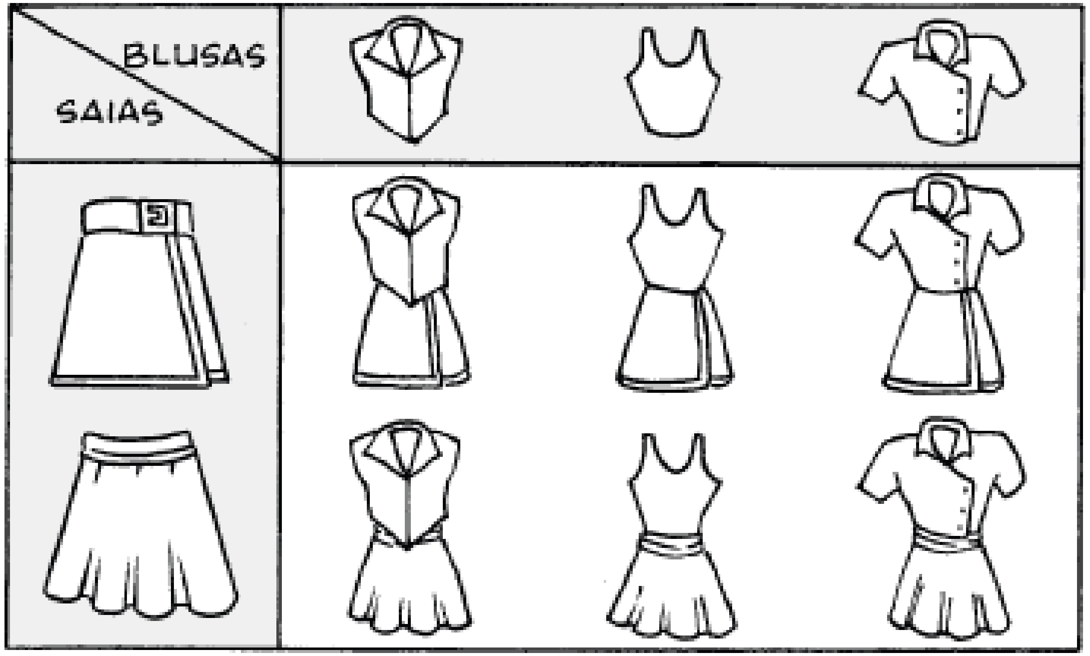
Exercício I - Maria é muito indecisa. Ela pretende sair com suas amigas e está pensando em qual roupa vestir. Ela pode combinar três blusas diferentes com duas saias diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir?

Vamos representar por S1 e S2 as duas saias de Maria. Podemos listar todas as combinações possíveis.

• Se ela escolheu a saia S1, então ela pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.

•De modo análogo, se ela escolheu a saia S2, ela também pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.

Então ao todo ela pode se vestir de 3+3=6 modos diferentes. Veja estas possibilidades na figura a seguir.



A resposta 3+3=6 também pode ser escrita como . Neste caso podemos raciocinar assim. Para a escolha da saia temos 2 possibilidades. Uma vez escolhida a saia, temos 3 blusas para escolher. Então ao todo temos 3x2=6 pois temos uma soma de duas parcelas iguais a 3.

Exercício II - Quantos são os números de dois algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4?

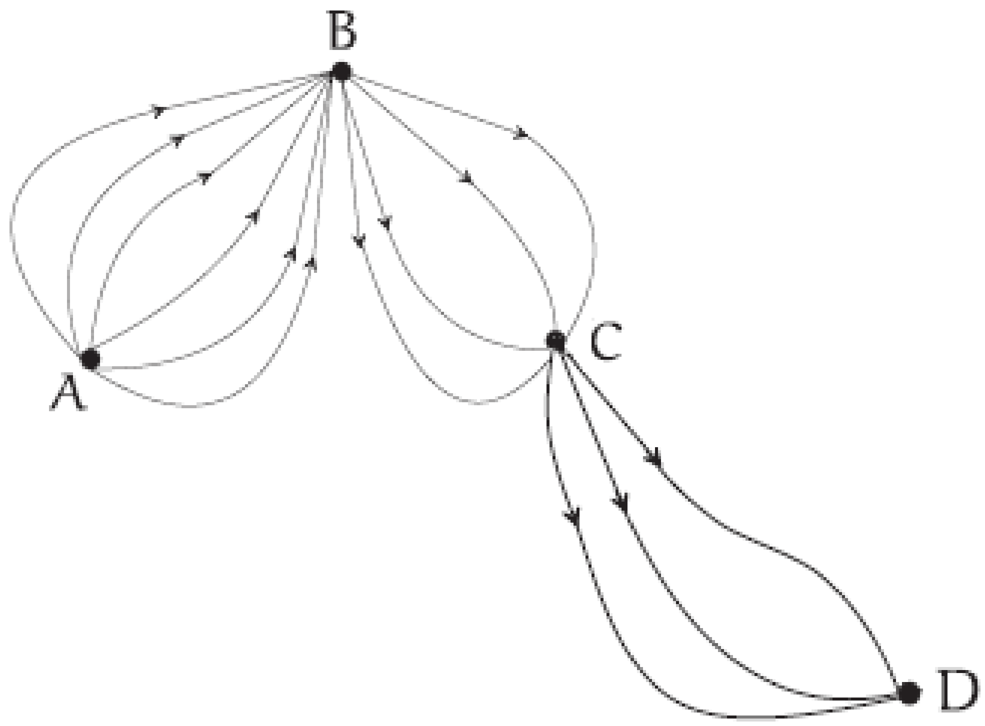
Para resolver este problema podemos listar todas as possibilidades.

- Se o número começa com o algarismo 1 temos: 12, 13 e 14. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 2 temos: 21, 23 e 24. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 3 temos: 31, 32 e 34. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 4 temos: 41, 42 e 43. São três possibilidades.

Então ao todo temos 3+3+3+3=12 números possíveis.

Solução alternativa:
Para a escolha do primeiro algarismo temos 4 possibilidade (são as quatro linhas destacadas na solução). Uma vez escolhido este primeiro algarismo, sobram 3 possibilidades para a escolha do algarismo seguinte (são as três possibilidades em cada linha da solução). Daí o total de possibilidades é igual ao produto pois temos uma soma de 4 parcelas iguais a 3. 1234=×

Exercício III – Existem 6 estradas ligando as cidades A e B; existem 4 estradas ligando as cidades B e C; existem 3 estradas ligando as cidades C e D. De quantas maneiras é possível dirigir de A até D?



Para o trecho AB podemos escolher uma entre 6 estradas disponíveis. Uma vez escolhida esta estrada, para o trecho BC, temos 4 escolhas. Depois de escolhida esta estrada, temos 3 possibilidades para o trecho CD. Portanto temos 6x4x3=72 modos diferentes de dirigir de A até D.

Exercício IV – Muitos bancos estão trocando senhas numéricas por senhas alfa-numéricas (formadas por letras). Se a senha é formada por 4 letras diferentes escolhidas em um alfabeto de 26 letras, de quantos modos diferentes uma pessoa pode formar a sua senha?

Para definir a sua senha, uma pessoa deve decidir qual é cada uma das letras da senha.

- A primeira letra da senha pode ser escolhida de 26 modos diferentes.
- Escolhida a primeira letra, sobram 25 letras para a segunda posição da senha.
- Se foram escolhidas a primeira e a segunda letra, sobram 24 letras para a terceira posição da senha.
- E se foram escolhidas as três primeiras letras, a última letra pode ser escolhida de 23 modos diferentes.

Portanto a senha pode ser formada de 26x25x24x23=359800 modos diferentes.

Exercício V – Considere as letras da palavra **HILBERT.**

- Quantos são os anagramas desta palavra?
- Quantos destes anagramas começam com uma vogal?
- Quantos anagramas possuem as letras HIL escritas sequencialmente nesta ordem?

- Utilizando o conceito de permutação, uma palavra de 7 letras diferentes possui 7! anagramas, pois esta é a quantidade de permutações de 7 objetos diferentes.
- Começamos escolhendo a vogal. Como a palavra HILBERT possui duas vogais, existem duas possibilidades para escolher a vogal que vai começar o anagrama. Uma vez escolhida esta vogal, sobram 6 letras que podem ser permutadas a vontade. A quantidade de permutações destas 6 letras é igual a 6!. Portanto a quantidade de anagramas da palavra HILBERT que começam por vogal é igual a 2x6!.

- As letras HIL podem aparecer nas seguintes cinco posições do anagrama

HILxxxx, xHILxxx, xxHILxx, xxxHILx ou xxxxHIL

onde estamos indicando por "x" as demais letras que formarão o anagrama. Começamos então escolhendo uma destas 5 possibilidades. Feita esta escolha, para terminar o anagrama, escolhemos a ordem das outras 4 letras restantes. Sabemos que a quantidade de permutações de 4 letras diferentes é igual a 4!. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta deste item é igual a 5×4!.

Exercício VI - Quantos são os números de três algarismos distintos?

Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a zero. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois ele não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo. A resposta é 9x9x8=648.

Exercício VII – Na caixinha de costura de Lilavati só há botões de três cores: pretos, brancos e marrons. Os botões são de três tamanhos: pequenos, médios e grandes, e além disso são de duas formas: quadrados e redondos. Na caixinha não há botões pequenos redondos nem botões grandes pretos, e dos outros tipos há exatamente um botão de cada.

(A) Quantos botões brancos quadrados há na caixinha?
(B) Quantos botões há na caixinha?

Resolução:

(A) Botões brancos quadrados distinguem-se pelo tamanho. Como só há um botão de cada tipo, segue que na caixinha de Lilavati há exatamente 3 botões brancos quadrados: um pequeno, um médio e um grande.

(B) Como são 3 possibilidades para tamanho, 2 possibilidades para a forma e 3 possibilidades para cor, segue que o número de possíveis tipos de botões é 3x2x3=18. Por outro lado, como não há botões pequenos redondos (seriam 3, um para cada cor) nem botões grandes pretos (seriam 2, um para cada forma) e só há um botão de cada tipo, o total de botões na caixinha de Lilavati é 18-3-2=13

Exercício VIII – O retângulo a seguir está dividido em 5 regiões. Se temos 5 cores a nossa disposição, de quantas maneiras podemos colorir este retângulo de modo que cada região receba uma cor e regiões adjacentes sejam coloridas com cores diferentes?

Devemos considerar dois casos, analisando separadamente se as regiões da esquerda e da direita são coloridas da mesma cor ou com cores diferentes. Suponhamos então que as regiões da esquerda e da direta são coloridas com a mesma cor. Neste caso:

- A região da esquerda pode ser colorida com 5 cores.
- A região da direita pode ser colorida de uma única cor: a mesma cor da região da esquerda.
- A faixa horizontal de cima pode ser colorida com 4 cores, pois não podemos repetir a cor das regiões laterais.
- A faixa horizontal do meio pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
- A faixa horizontal de baixo também pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

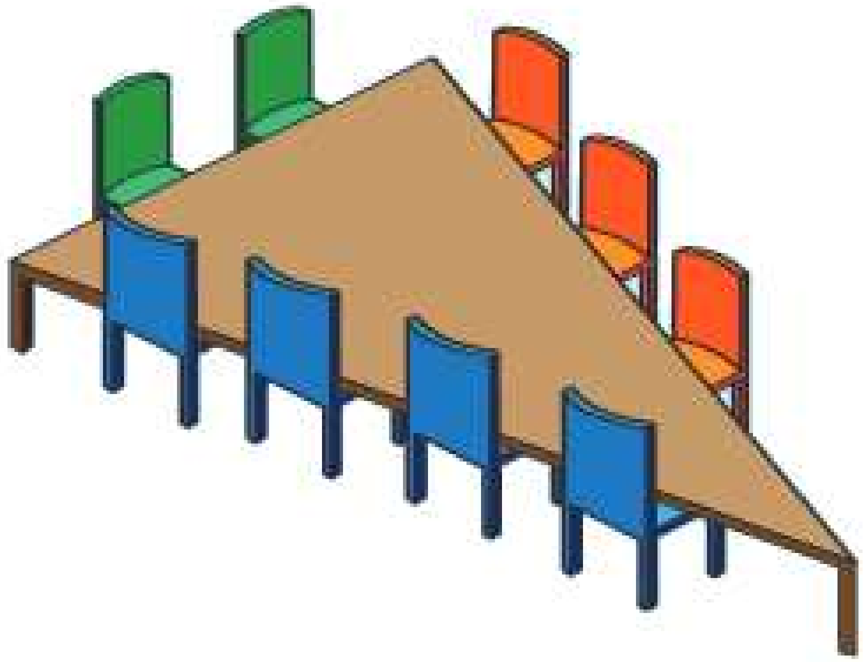
Neste caso obtemos 5x1x4x3x3=180 possibilidades.

Suponhamos agora que as regiões da esquerda e da direta são coloridas com cores diferentes. Neste caso:

- Existem 5 opções de cores para a região da esquerda.
- Em seguida existem 4 opções de cores para a região da direita, pois ela deve ser colorida com uma cor diferente da região da esquerda.
- Daí podemos colorir a faixa horizontal de cima com 3 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais.
- Em seguida podemos colorir a faixa horizontal do meio com 2 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
- Finalmente a faixa horizontal de baixo também pode ser coloria com 2 cores pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos 5x4x3x2x2=240 possibilidades. Somando, concluímos que o retângulo pode ser colorido de 180+240=420 maneiras diferentes.

Exercício IX - Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?



Resolução - Há 6 possibilidades para escolher dois lugares juntos no mesmo lado da mesa: 1 no lado com 2 lugares, 2 no lado com 3 lugares e 3 no lado com 4 lugares. Uma vez escolhida uma dessas possibilidades, Alice e Bernardo podem se sentar de duas maneiras diferentes nesses lugares. Os quatro amigos que ainda estão em pé podem se sentar nos 7 lugares vazios de 7x6x5x4 =840 maneiras diferentes. No total, os amigos podem se sentar-se à mesa de 6x2x840=10080 maneiras diferentes.

Exercício IX - As peças da figura 1 são feitas de quadradinhos de cartolina cinza de um lado e branca do outro. A figura 3 mostra uma maneira de encaixar essas peças com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da figura 2. De quantas maneiras diferentes é possível fazer isso?

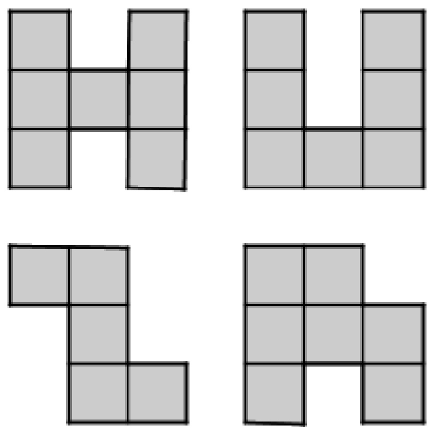


Figura 1

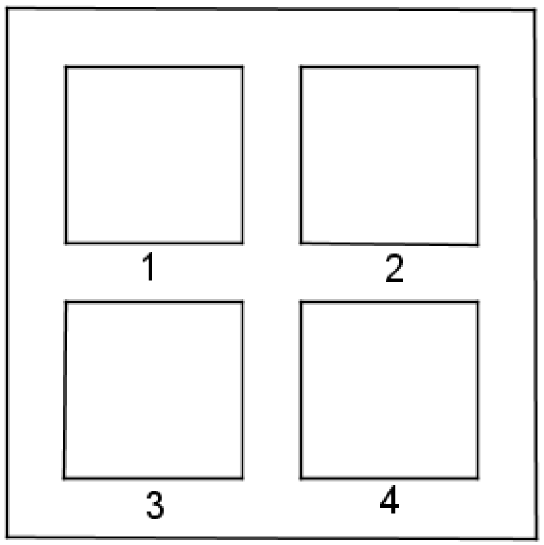


Figura 2

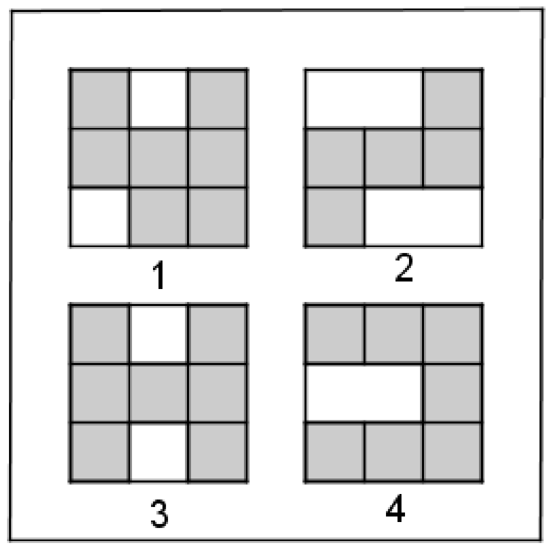


Figura 3

Vamos denotar as peças, da esquerda para a direita e de cima para baixo, de H, U, Z e R. A peça H só pode ser colocada de 2 maneiras diferentes em um quadrado, a peça U de 4 maneiras diferentes, a peça Z de 2 maneiras diferentes e a peça R de 4 maneiras diferentes. Uma vez fixada a posição em que as peças vão entrar nos quadrados, elas podem ser distribuídas de 4!=4x3x2x1=24 maneiras diferentes. Logo o número de maneiras diferentes de colocar as peças nos quadrados é 2x4x2x4x24=1536.