Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica com uma Infinidade de Termos

Seja q um número, com $-1 < q < 1$. É possível mostrar que os termos da progressão geométrica $(q^n) = (q, q^2, q^3, \dots)$, com primeiro termo e razão ambos iguais a q, aproximam-se arbitrariamente de zero, quando n cresce indefinidamente. Mais especificamente, para cada número positivo ε, existe um inteiro positivo k tal que $|q^n| < \varepsilon$, para todo $n > k$. Isso é expresso dizendo que o limite da sequência (q^n) é igual a zero. A soma dos n primeiros termos dessa progressão é igual a $S_n = \frac{q(q^n-1)}{q-1}$. Para cada número positivo ε, o número $\varepsilon' = \frac{\varepsilon\cdot(1-q)}{q}$ também é positivo. Conforme afirmado anteriormente a respeito da progressão (q^n), existe um inteiro positivo k tal $|q^n| < \varepsilon'$, para todo $n > k$. Assim, $\left|\frac{q(q^n-1)}{q-1} - \frac{q}{1-q}\right| = \left|\frac{q}{1-q}\cdot q^n\right| = \frac{q}{1-q}\cdot|q^n| < \frac{q}{1-q}\cdot\varepsilon' = \frac{q}{1-q}\cdot\frac{\varepsilon\cdot(1-q)}{q} = \varepsilon$, para todo $n > k$. Em outras palavras, os termos da sequência $(S_n) = (S_1, S_2, S_3, \dots)$ aproximam-se arbitrariamente de $\frac{q}{1-q}$ quando n cresce indefinidamente. Diz-se que o limite da sequência (S_n) é igual a $\frac{q}{1-q}$ ou, mais informalmente, que a soma de todos os termos da progressão geométrica (q^n) é igual a $\frac{q}{1-q}$. Observe que não tem sentido somar todos os termos de uma sequência com uma infinidade de termos e, assim, dizer que "a soma de todos os termos da progressão geométrica (q^n) é igual a $\frac{q}{1-q}$" é uma "força de expressão".

No caso em que q é um número, com $q \leq -1$ ou $q \geq 1$, é possível mostrar que os termos da progressão geométrica $(q^n) = (q, q^2, q^3, \dots)$ não se aproximam de número algum, quando n cresce indefinidamente. Nesse caso, diz-se que não existe o limite da sequência (q^n). Nesse caso, também não existe o limite da sequência (S_n) ou, mais informalmente, diz-se que não existe a soma de todos os termos da progressão geométrica (q^n).

Seja $(a_n) = (a_1 q^{n-1}) = (a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots)$ uma progressão geométrica com primeiro termo a_1 e razão q. Argumentando-se de maneira análoga ao que foi feito no caso da progressão geométrica (q^n), conclui-se que se $-1 < q < 1$, então o limite da sequência cujos termos são somas dos primeiros termos de (a_n) é igual a $\frac{a_1}{1-q}$, e se $q \leq -1$ ou $q \geq 1$, então não existe o limite dessa sequência de somas. Informalmente, diz-se que se $-1 < q < 1$, então a soma de todos os termos da progressão geométrica (a_n) é igual a $\frac{a_1}{1-q}$, e se $q \leq -1$ ou $q \geq 1$, então não existe a soma dos termos da progressão geométrica (a_n).