**Exemplo 5:** Uma professora tem 3 bolas de gude para distribuir para 5 meninos (digamos, Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo). De quantos modos ela pode fazer essa distribuição supondo que os contemplados possam ganhar mais de uma bola? (Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas.)

**Solução:** O número de possibilidades é igual ao número de listas[tex] (x1, x2, x3, x4, x5) [\tex] (soluções) de números inteiros não negativos (representando o número de objetos dados a Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo, respectivamente) que satisfazem a equação [tex] x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 3 [\tex].

Para resolvermos equações da forma [tex] x\_1 + x\_2 + x\_3 + x\_4 + ...+ x\_n = p [/tex], basta calcularmos o número de combinações com repetições, ou seja, contar o número de maneiras de distribuir p objetos para n pessoas, [tex] CR\_{n,p} [/tex] que é da seguinte forma:

[tex] CR\_{n,p} = C\_{n+p-1,p}=P^{n-1,p}\_{n+p-1} [/tex]

Lembrando:

[tex] C\_{n+p-1,p} = \dfrac{(n+p-1)!} {((n+p-1)-p)!\times p!} = \dfrac{(n+p-1)!} {(n -1)!\times p!} [/tex]

[tex] P^{n-1,p}\_{n+p-1} = \dfrac{(n+p-1)!} {(n -1)!\times p!} [/tex]

No nosso problema temos que calcular [tex] CR\_{5,3}[/tex]. Calculando:

[tex] CR\_{5,3} = C\_{5+3-1,3}=C\_{7,3}=\dfrac{7!}{4!\times 3!} = 7\times 5 = 35[/tex].

Logo o número de modos é 35.

**Exercício 15:** Quantas são as soluções inteiras e positivas de [tex] x+y+z = 7 [/tex]?

Temos a restrição de que x, y e z devem ser diferentes de zero. Para resolvermos esse problema basta considerarmos:

[tex] x = 1+a[/tex]

[tex] y = 1+b [/tex]

[tex] z = 1+c [/tex]

 Onde a, b e c são inteiros não negativos.

Substituindo os valores na equação temos:

[tex] (1+a)+(1+b)+(1+c) = 7 [/tex]

Manipulando, chegamos a seguinte equação:

[tex] a + b + c = 4 [/tex]

Para encontrarmos o número de soluções inteiras não negativas dessa equação basta calcularmos

[tex] CR\_{3,4} = C\_{4+3-1,4}= C\_{6,4}= P^{2,4}\_{6} [/tex]

[tex] C\_{6,4} = \dfrac{6!}{4!\times 2!} = 15[/tex].

Logo 15 é o número de soluções inteiras positivas da equação.

**Exercício 16:** Quantas são as soluções inteiras e não negativas da desigualdade [tex] x+y+z\le 6 [/tex]?

Podemos resolver esse exercício calculando as soluções inteiras não negativas de cada equação

[tex] x+y+z = r[/tex] onde r assume valores inteiros de 0 a 6. Nesse caso, até dá pra calcular, mas em um intervalo maior será mais trabalhoso. Para encontrarmos a solução desse problema, vamos considerar a equação e encontrar suas soluções inteiras não negativas:

[tex] x+y+z+f = 6 [/tex]

Para isso, basta calcularmos [tex] CR\_{4,6} = C\_{4+6-1,6}=C\_{9,6}=84[/tex]

**Exercício 17:** Uma indústria fabrica 5 tipos de balas, que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos diferentes de caixa podem ser fabricados?

Para formar uma caixa, devemos selecionar 20 dentre os 5 tipos, valendo repetição na escolha. Ou seja, devemos formar soluções inteiras e não negativas de [tex]x\_1 + x\_2 + x\_3 + x\_4 + x\_5 = 20[/tex], onde [tex]x\_i[/tex] é o número de bombons do tipo i. A resposta é [tex] CR\_{20, 5} = C\_{20, 24} = 10626[/tex].

**Observação:** Se fosse considerado que em cada caixa deviam ter ao mínimo uma bala de cada tipo, deveríamos calcular as soluções inteiras e positivas da equação.

**Exercício:** De quantos modos podem ser pintados 9 objetos iguais usando 3 cores diferentes?

A solução desse exercício é equivalente a encontrar as soluções inteiras não negativas de

 [tex] x\_1+x\_2+x\_3 = 9 [/tex], que é dada da forma [tex] CR\_{3,9}=C\_{11,9}=55[/tex]

**Exercício 12:** Uma loja vende barras de chocolate de diversos sabores. Em uma promoção era possível comprar três barras de chocolate com descontos, desde que essas fossem dos seguintes sabores: ao leite, amargo, branco ou com amêndoas. As três barras escolhidas podem ou não ter sabores repetidos. Assim, um cliente para comprar as três barras na promoção poderá escolher os sabores de n modos distintos. Qual o valor de n?

Seja Si a quantidade de chocolates de cada sabor [tex] i ∈ {1, 2, 3, 4}[/tex]. O problema equivale a calcular o número de soluções naturais da equação

 [tex]S1 + S2 + S3 + S4 = 3[/tex].

Portanto, como existem [tex]P^{ 3,3}\_ {6}= 20[/tex] soluções da equação nos inteiros não negativos, n = 20

**Problema 13:** Uma pessoa dispõe de balas de hortelã, caramelo e coco, cada uma com apenas um sabor. Ele pretende “montar” saquinhos com 13 balas cada, de modo que em cada saquinho haja no mínimo 3 balas de cada sabor. Um saquinho se diferencia do outro pelas quantidades de balas de cada sabor. Sendo assim, quantos saquinhos diferentes podem ser “montados”?

Seja [tex]Si[/tex] a quantidade de balas de cada sabor [tex]i ∈ {1, 2, 3}[/tex]. Como Si ≥ 3, podemos escrever [tex]Si = si + 3[/tex] com [tex]si ≥ 0[/tex]. O problema se resume em calcularmos o número de soluções da equação

[tex]S1 + S2 + S3 = 13 [/tex]

[tex] (s1 + 3) + (s2 + 3) + (s3 + 3) = 13[/tex]

[tex]s1 + s2 + s3 = 4[/tex].

Portanto, existem [tex]CR\_{3,4}= C\_{6,4} = 15[/tex] maneiras diferentes de montar os saquinhos.