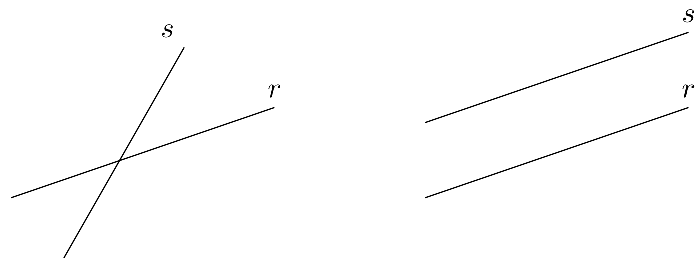
ENCONTRO 6

Os principais assuntos e os vídeos relacionados da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube que serão estudados neste encontro são:

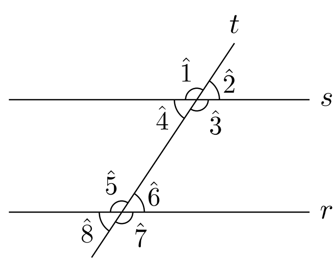
Assuntos	**Vídeos de Geometria: PICOBMEP no YouTube**
Posição relativa de duas retas. Retas paralelas cortadas por uma transversal: ângulos correspondentes, ângulos alternos internos, ângulos alternos externos, etc.	4, 15, 16, 17
Uma demonstração para o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo. Teorema do Ângulo Externo.	18
A circunferência e seus elementos: centro, raio, diâmetro, corda, arco.	43
Construção e caracterização de alguns lugares geométricos básicos com o objetivo de reforçar as definições de círculo, mediatriz, bissetriz, retas paralelas, etc.	28
Apresentação dos pontos notáveis de um triângulo (se possível utilizar um *software* de geometria dinâmica).	30, 31, 32, 38, 39

6.1 Retas paralelas cortadas por uma transversal

Por dois pontos distintos no plano passa uma e somente uma reta. Deste modo, dadas duas retas distintas no plano, ou elas possuem um único ponto em comum, ou elas não possuem ponto em comum. No primeiro caso elas são chamadas de **concorrentes** e no segundo caso elas são **paralelas**. Na figura a seguir vemos, respectivamente duas retas concorrentes e duas retas paralelas r e s. Observamos que as posições relativas entre retas estão discutidas no vídeo 4 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube.



Agora vamos considerar duas retas no plano, como as retas r e s representadas na figura anterior à direita. Analisando uma figura como esta, se nada foi dito previamente sobre as retas r e s, podemos concluir que as retas r e s são paralelas? Pense sobre isso e observe que como as retas são infinitas e vemos apenas uma pequena parte delas, então é impossível concluir se elas são paralelas ou concorrentes através da análise de uma ilustração. Para decidir sobre qual é a posição relativa de r e s é necessário obter alguma informação geométrica mais precisa. Uma maneira de fazer isso é traçar uma reta t transversal às retas r e s. Na figura a seguir vemos exatamente esta situação, onde estão ilustradas duas retas r e s ambas cortadas por uma reta transversal t.

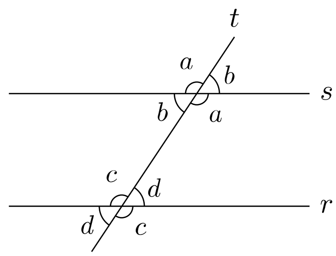


Para caracterizar o paralelismo das retas r e s, vamos comparar os ângulos formados pelas retas r e t com os ângulos formados pelas retas s e t. Para a comparação de dois desses ângulos, dependendo se eles estão de um mesmo lado da transversal t e dependendo se eles estão entre as retas r e s (interior) ou se eles não estão entre as retas r e s (exterior) é utilizada a seguinte nomenclatura (veja o vídeo 15 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube).

- Os ângulos $\hat{2}$ e $\hat{6}$ são correspondentes.
- Os ângulos $\hat{3}$ e $\hat{5}$ são alternos internos.
- Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{7}$ são alternos externos.
- Os ângulos $\hat{3}$ e $\hat{6}$ são colaterais internos.
- Os ângulos $\hat{2}$ e $\hat{7}$ são colaterais externos.

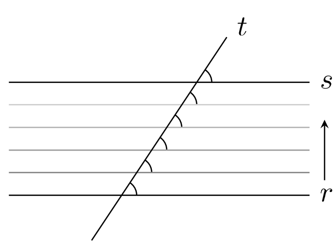
Nesta figura existem outros pares de ângulos correspondentes, alternos internos, alternos externos, etc. O que importa é a posição relativa dos dois ângulos analisados. Por exemplo, os ângulos $\hat{4}$ e $\hat{8}$ são correspondentes, pois ambos estão de um mesmo lado da reta t e ambos estão abaixo das retas r e s. Já os ângulos $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são alternos internos, pois cada um deles está de um lado da reta t e ambos estão entre as retas r e s. No Exercício 1 desta seção, procedendo de modo análogo, você será convidado a classificar outros pares de ângulos desta mesma figura.

Como ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida, de fato, na figura anterior podem aparecer apenas 4 ângulos diferentes, indicados com as letras a, b, c e d na figura a seguir.



Vamos analisar agora o paralelismo das retas r e s em termos destes ângulos a, b, c e d.

Movendo paralelamente uma reta r ao longo de uma reta transversal t, vemos que os ângulos que r formam com t não se modificam ao longo deste movimento (veja figura a seguir). Assim se r e s são retas paralelas cortadas por uma reta transversal t, então os ângulos entre r e t são iguais aos respectivos ângulos entre s e t. Logo, ângulos correspondentes são iguais, ângulos alternos internos são iguais e assim por diante. Além disso, por outro lado, podemos mostrar que, quando os ângulos entre r e t possuem as mesmas medidas dos respectivos ângulos entre as retas s e t, então as retas r e s são paralelas. Deste modo, em relação a figura anterior, dizer que as retas r e s são paralelas é o mesmo que dizer que $a = c$ e $b = d$.

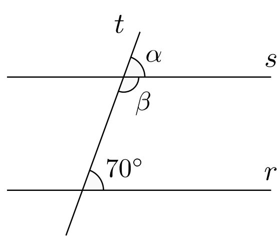


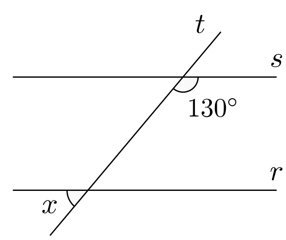
Resumindo, podemos enunciar o seguinte resultado que caracteriza quando duas retas são paralelas através da comparação dos ângulos formados por estas retas e uma terceira reta transversal.

Teorema: *No plano sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal t. As retas r e s são paralelas quando elas determinam com a reta t ângulos correspondentes (ou ângulos alternos internos) de mesma medida.*

Vamos utilizar este teorema na solução de alguns exemplos.

Exemplo 1: Em cada uma das figuras a seguir, observando os ângulos entre as retas paralelas r e s com a transversal t, calcule as medidas dos ângulos indicados por letras.

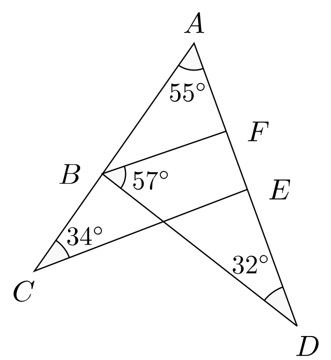




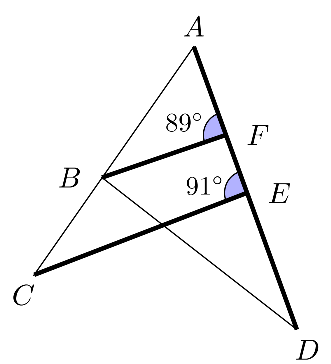
Solução. Na figura da esquerda os ângulos 70° e α são ângulos correspondentes. Como as retas r e s são paralelas, estes ângulos possuem a mesma medida e assim $\alpha = 70°$. Agora observe que os ângulos α e β são ângulos suplementares. Daí $\beta = 180° - \alpha = 180° - 70° = 110°$. Nesta figura os ângulos 70° e β são ângulos colaterais internos. Observe que na solução deste exercício mostramos que ângulos colaterais internos de retas paralelas cortadas por uma transversal são ângulos suplementares.

Para a outra figura observe, à esquerda do ângulo de 130°, o seu ângulo suplementar $50° = 180° - 130°$. Os ângulos 50° e x são ângulos correspondentes. Daí, como as retas r e s são paralelas e neste caso ângulos correspondentes possuem a mesma medida, podemos concluir que $x = 50°$.

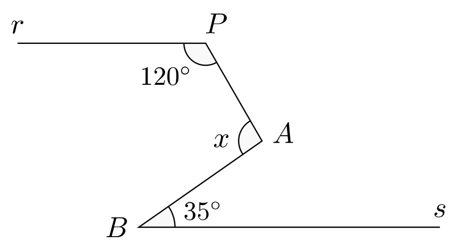
Exemplo 2: Na figura a seguir, os pontos A, F, E e D estão alinhados assim como os pontos A, B e C também estão alinhados. As retas CE e BF são paralelas?



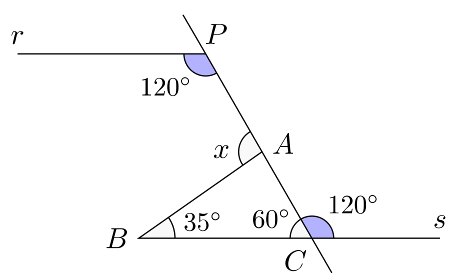
Solução. No triângulo BFD vemos que $B\hat{F}D = 180° - (57° - 32°) = 91°$. Daí segue que $B\hat{F}A = 180° - 91° = 89°$. E no triângulo CEA vemos que $C\hat{E}A = 180° - (34° + 55°) = 91°$. Como as retas CE e BF possuem ângulos correspondentes $B\hat{F}A = 89°$ e $C\hat{E}A = 91°$ diferentes quando cortadas pela transversal AD, segue que elas não são retas paralelas.



Exemplo 3: Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Qual é a medida do ângulo x?

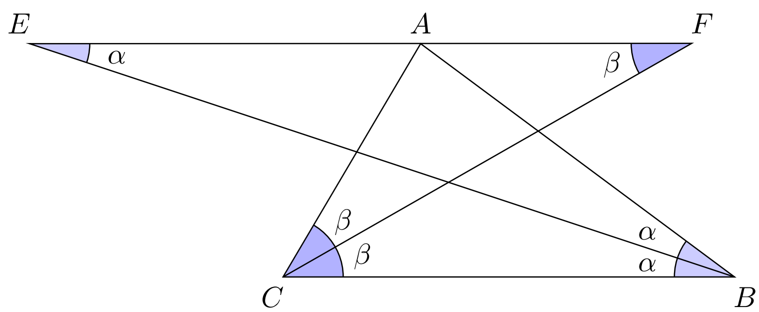


Solução. Prolongue o segmento PA até ele encontrar a reta s em um ponto C. Como as retas r e s são paralelas, podemos identificar os dois ângulos alternos internos de 120° indicados na figura a seguir.



Olhando o ângulo raso no vértice C, concluímos que $A\hat{C}B = 60^\circ$, pois este é o suplementar do ângulo adjacente de 120°. No triângulo ABC, x é ângulo externo não adjacente aos ângulos internos de 35° e de 60°. Daí $x = 35^\circ + 60^\circ = 95^\circ$.

Exemplo 4: (Banco de Questões 2011 – Nível 2 – questão 55) Seja ABC um triângulo com $AB = 13$, $BC = 15$ e $AC = 9$. Seja r a reta paralela a BC traçada por A. A bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ corta a reta r em E e a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ corta r em F. Calcular a medida do segmento EF.



Solução. Como a reta EF é paralela ao lado BC, os ângulos alternos internos gerados pela transversal CF são iguais, isto é, $F\hat{C}B = C\hat{F}A$. Por outro lado, como CF é bissetriz, temos que $F\hat{C}B = F\hat{C}A$ e assim, $F\hat{C}A = C\hat{F}A$, donde o triângulo CAF é isósceles de base CF. Portanto, $AF = AC = 9$.

Analogamente, concluímos que o triângulo BAE é isósceles de base BE e $AE = AB = 13$. Assim, $EF = EA + AF = 13 + 9 = 22$.

Exercícios:

1. Observando a figura da página 51, em cada item classifique os pares de ângulos como: ângulos correspondentes, ângulos alternos internos, ângulos alternos externos, ângulos colaterais internos ou colaterais externos.

   (a) ângulos $\hat{4}$ e $\hat{5}$.

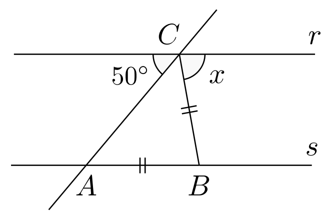
   (b) ângulos $\hat{3}$ e $\hat{7}$.

   (c) ângulos $\hat{2}$ e $\hat{8}$.

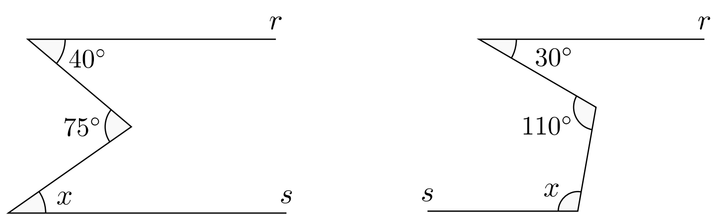
   (d) ângulos $\hat{4}$ e $\hat{6}$.

   (e) ângulos $\hat{1}$ e $\hat{8}$.

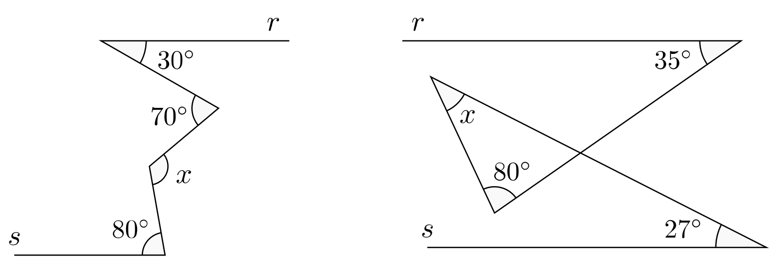
2. Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Se $\overline{AB} = \overline{CB}$, determine a medida do ângulo x.



3. Em cada figura, determine a medida do ângulo x sabendo que as retas r e s são paralelas.

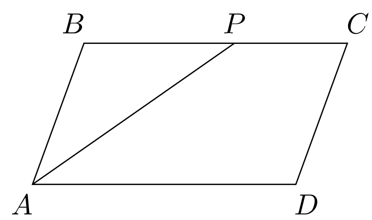


4. Determine a medida do ângulo x sabendo que as retas r e s são paralelas.

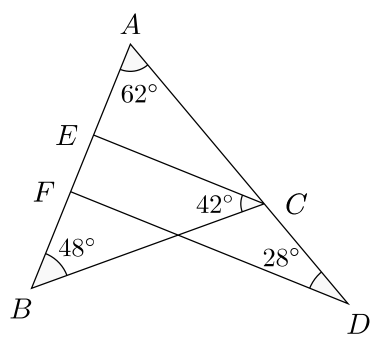


5. Sendo $ABCD$ um paralelogramo, AP bissetriz do ângulo $\hat{A}$, $\overline{AB} = 7$ cm e $\overline{PC} = 3$ cm, determine o perímetro do paralelogramo.

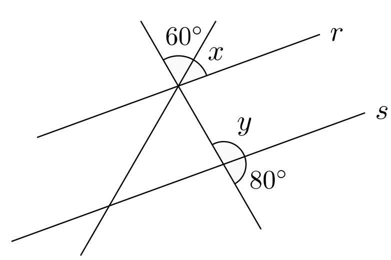
"geometria˙diagra
2015/7/22
page 59
Estilo OBMEP



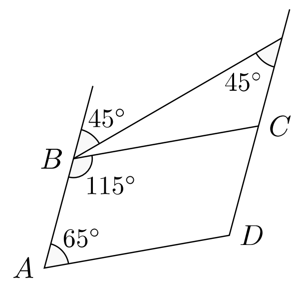
6. (Banco de Questões 2010, Nível 2, problema 61, página 46) Na figura dada, as retas EC e FD serão paralelas?



7. (Banco de Questões 2010, Nível 2, problema 74, página 48) Sabe-se que as retas r e s são paralelas. Determine as medidas dos ângulos x e y.



8. (Banco de Questões 2010, Nível 2, problema 89, página 50) O quadrilátero $ABCD$ da figura é um paralelogramo?

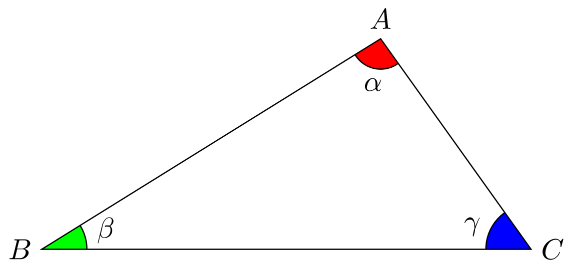


9. No vídeo 15 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube é apresentado um problema de travessia de um rio. Assista este vídeo e resolva este problema utilizando os conhecimentos aprendidos nesta aula sobre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Em seguida, compare sua solução com as soluções apresentadas no vídeo 16.

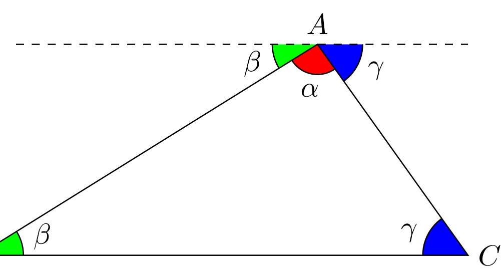
6.2 A soma dos ângulos internos de um triângulo

No encontro anterior, através de uma atividade com dobraduras, vimos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Naquele encontro não tínhamos as ferramentas necessárias para apresentar uma demonstração mais detalhada deste fato e prometemos que ela seria apresentada neste encontro. O objetivo desta seção é, então, apresentar uma demonstração deste teorema como uma aplicação das propriedades dos ângulos alternos internos estudadas na seção anterior. Para dizer a verdade, no fundo, estamos utilizando o Axioma das Paralelas (estude esta demonstração também no vídeo 18).

Seja ABC um triângulo com ângulos internos α, β e γ, como ilustrado na figura a seguir.

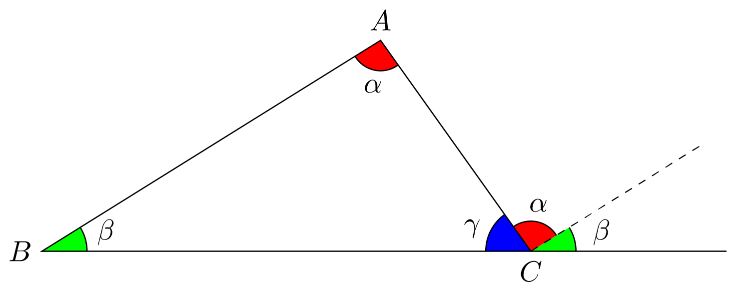


Traçando pelo vértice A a reta paralela ao segmento BC, identificamos os ângulos alternos internos de medida β e também identificamos os ângulos alternos internos de medida γ, como indicado na figura a seguir.



Fazendo esta construção, obtemos no vértice A um ângulo raso que é igual a soma dos ângulos adjacentes β, α e γ. Isto significa que $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ e, portanto, concluímos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$.

Aproveitando este contexto também podemos fazer uma construção para demonstrar o Teorema do Ângulo Externo que nos diz que em um triângulo um ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes. De fato, traçando pelo vértice C, como indicado na figura a seguir, uma reta paralela ao segmento AB, identificamos os ângulos alternos internos de medida α e os ângulos correspondentes de medida β.

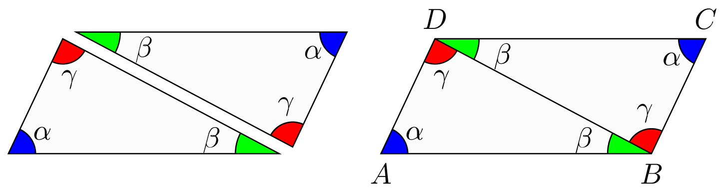


Estes dois ângulos adjacentes α e β que foram construídos com o auxílio da paralela somam exatamente o ângulo externo no vértice C. Portanto, este ângulo externo é igual a soma $\alpha + \beta$ dos dois ângulos internos não adjacentes.

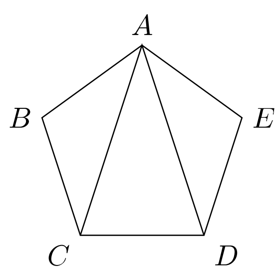
Para finalizar, podemos aproveitar a figura anterior para mostrar, de outro modo ainda, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$. De fato, observe que nessa figura, no vértice C, existe um ângulo raso que é igual a $\alpha + \beta + \gamma$. Isto significa que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Exercícios:

1. A figura da esquerda ilustra como podemos juntar duas cópias de um mesmo triângulo para obter o quadrilátero $ABCD$ da figura da direita. Mostre que este quadrilátero é um paralelogramo. Ou seja, mostre que as retas AB e CD são paralelas e também mostre que as retas AD e BC são paralelas.



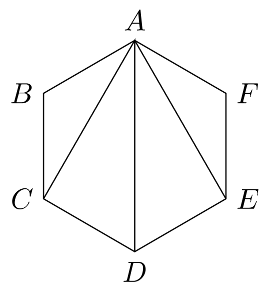
2. Na figura a seguir vemos um pentágono regular $ABCDE$. Traçando as diagonais do pentágono pelo vértice A, ele fica dividido em três triângulos. Observando que a soma dos ângulos destes triângulos é igual a soma dos ângulos internos do pentágono, determine a soma dos ângulos internos de um pentágono regular.



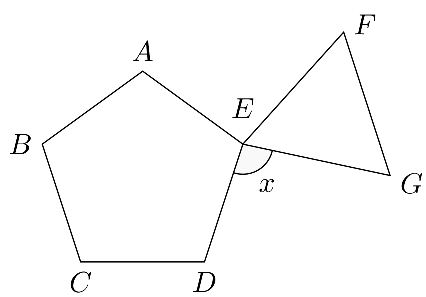
3. No exercício anterior demonstramos que a soma dos ângulos internos de um pentágono regular é igual a $540°$. Qual é a medida de cada um dos ângulos internos de um pentágono regular?

4. Repita os exercícios anteriores para um hexágono regular $ABCDEF$. Isto é, determine a soma dos ângulos internos de um hexágono regular e, em seguida, determine o valor de cada um dos ângulos internos de um hexágono regular.

“geometria˙diagra
2015/7/22
page 64
Estilo OBMEP



5. Na figura a seguir, vemos um pentágono regular $ABCDE$ e um triângulo equilátero EFG unidos pelo vértice comum E. Determine a medida do ângulo $x = D\hat{E}G$ para que os lados BC e FG estejam contidos em retas paralelas.



6.3 A circunferência e alguns dos seus elementos

O objetivo desta seção é apresentar o conceito de circunferência e os conceitos de outros elementos relacionados a uma circunferência. Estes conceitos são importantes, pois eles podem aparecer em problemas relacionados com as mais variadas formas geométricas. Deste modo, é importante você conhecer os conceitos e as propriedades mais importantes relacionadas a uma circunferência. Sugerimos fortemente que o