GABARITO DA AVALIAÇÃO DO CICLO I

Solução da tarefa de casa 1

http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n3-2005.pdf

a) Seguindo a lei de formação da sequência, os 20 primeiros termos são $0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, 24, 28, 31, 35, 38, 42, 45, 49, 52, 56, 59, 63$ e 66. Para os itens b) e c), observamos que a sequência dada pode ser decomposta em duas sequências, como segue:

(i) a sequência I dos termos de ordem ímpar: $0, 7, 14, 21, \ldots$. Esta sequência consiste dos múltiplos de 7; seu termo geral é $7n$ para $n \geq 0$.

(ii) a sequência P dos termos de ordem par: $3, 10, 17, 24, \ldots$. Esta sequência consiste dos múltiplos de 7 somados com 3; seu termo geral é $7n + 3$ para $n \geq 0$.

b) Como 1000 é par, vemos que o 1000^{o} termo da sequência original é o 500^{o} termo da sequência P. Este termo corresponde a $n = 499$, uma vez que o primeiro termo de P corresponde a $n = 0$. Logo, o termo procurado é $7 \times 499 + 3 = 3496$.

c) Temos que $2000 = 7 \times 285 + 5$. Logo, 2000 não pode ser escrito nem na forma $7n$ nem na forma $7n + 3$ para algum $n \geq 0$, e, portanto, 2000 não é um termo da sequência. Outra maneira de resolver este item é notar que as soluções das equações $2000 = 7n$ e $2000 = 7n + 3$ não são números naturais.

Solução da tarefa de casa 2

http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n3-2006.pdf

a).Uma volta completa em torno da pista tem a extensão de $1 + 2 + 6 + 4 = 13$ km. Por isso, para percorrer 14 km, precisamos dar uma volta completa e percorrer mais 1 km. A única forma de percorrer 1 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em B. Portanto, a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.

b) Como $100 = 7 \times 13 + 9$, uma corrida de 100 km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9 km. A única forma de percorrer 9 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em D. Portanto, a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

c) Como sugerido nos itens acima, a solução do problema está baseada na ideia de dar tantas voltas completas sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar estações convenientes para percorrer “o que falta”. Do ponto de vista matemático, o que acabamos de falar é a expressão do algoritmo da divisão euclidiana de números inteiros, no caso com divisor igual a 13. Em outras palavras, temos o diagrama habitualmente utilizado na divisão euclidiana:

$$\begin{array}{c|c} \text{dividendo (comprimento da corrida)} & \text{13 (divisor)} \\ \cline{2-2} \text{resto (“o que falta”)} & \text{quociente (número de voltas completas)} \end{array}$$

que representa a expressão $\text{dividendo} = 13 \times \text{divisor} + \text{resto}$, sendo o resto um número natural menor do que 13. Logo, o resto só pode ser um dos números $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ ou 12.

Inicialmente, vejamos como podemos realizar corridas com de 1 km até 13 km. Isto é feito por inspeção e o resultado está na tabela abaixo:

Extensão em km	*Posto de partida*	*Posto de chegada*
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
12	C	B
13	B	A
14	Qualquer um	O mesmo de partida

A partir dessa tabela, podemos concluir que é possível realizar corridas cuja extensão é qualquer número inteiro de quilômetros maior do que 13. Para isso, basta ver que temos duas possibilidades:

1ª possibilidade – a extensão é múltipla de 13: nesse caso, escolhemos um posto qualquer e a corrida começa e termina nesse posto, dando um número inteiro de voltas completas na pista. Por exemplo, se a extensão da corrida é $208 = 13 \times 16$ km, basta dar 16 voltas completas na pista.

2ª possibilidade – a extensão não é múltipla de 13: nesse caso, o resto da divisão da extensão da corrida por 13 é um dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$. Para cada um desses restos, a tabela acima fornece o posto de partida e o de chegada da corrida. Vejamos alguns casos:

- se o resto é 5, iniciamos a corrida no posto D e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $109 = 8 \times 13 + 5$ km, ela deve começar em D, dar 8 voltas completas até retornar a D e percorrer uma vez o trecho de D até B.
- se o resto é 11, iniciamos a corrida no posto C e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $245 = 18 \times 13 + 11$ km, ela deve começar em C, dar 18 voltas completas até retornar a C e percorrer uma vez o trecho de C até B.

Solução da tarefa de casa 3

http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n3-2013.pdf

a) Seja n a distância a ser percorrida por Adonis e Basílio. O algoritmo da divisão de Euclides nos permite escrever $n = 8a + r = 7b + s$, onde $0 \leq r \leq 7$ e $0 \leq s \leq 6$. Segue que $A(n) = a + r$ e $B(n) = b + s$. Por exemplo, $14 = 8 \times 1 + 6 = 7 \times 2 + 0$, donde $A(14) = 1 + 6 = 7$ e $B(14) = 2 + 0 = 2$. O restante da tabela pode ser preenchido analogamente:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A(*n*)	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	8	2
B(*n*)	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4

b) Para achar um desses números, basta fazer uma tabela como a do item anterior para valores de n entre 200 e 240.

n	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213
$A(n)$	25	26	27	28	29	30	31	32	26	27	28	29	30	31
$B(n)$	32	33	34	29	30	31	32	33	34	35	30	31	32	33

n	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227
$A(n)$	32	33	27	28	29	30	31	32	33	34	28	29	30	31
$B(n)$	34	35	36	31	32	33	34	35	36	37	32	33	34	35

n	228		229	230	**231**	232	233	234	235	236	237	**238**	**239**	240
$A(n)$	32		33	34	**35**	29	30	31	32	33	34	**35**	**36**	30
$B(n)$	36		37	38	**33**	34	35	36	37	38	39	**34**	**35**	36

Essa tabela mostra que $231, 238$ e 239 são os valores de n entre 200 e 240 tais que $A(n) > B(n)$. Observamos que a feitura dessa tabela não é tão trabalhosa como parece, pois o padrão dos valores de $A(n)$ e $B(n)$ é claro. Por exemplo, basta calcular $A(n)$ para os múltiplos de 8 e a linha correspondente a $A(n)$ é preenchida como segue:

n	$8k$	$8k+1$	$8k+2$	$8k+3$	$8k+4$	$8k+5$	$8k+6$	$8k+7$	$8(k+1)$
$A(n)$	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$	$k+5$	$k+6$	$k+7$	$k+1$

Observação análoga vale para a linha correspondente a $B(n)$.

c) Das expressões $n = 8a + r = 7b + s$, temos $A(n) = a + r = \frac{n-r}{8} + r = \frac{n+7r}{8}$ e $B(n) = b + s = \frac{n-s}{7} + s = \frac{n+6s}{7}$. Desse modo, $A(n) = B(n)$ se escreve como $\frac{n+7r}{8} = \frac{n+6s}{7}$. Simplificando essa expressão, chegamos a $n = 49r - 48s$. O maior valor possível para $49r - 48s$ é obtido colocando $r = 7$ e $s = 0$, ou seja, o número procurado é $d = 49 \times 7 = 343$. Fica como exercício mostrar que $A(n) < B(n)$ para $n > 343$.

<u>SOLUÇÃO DA 4 (PADRÕES DO IMPA, ONDE VALERIA 5 PTS):</u>

Solução da Questão

Como $a + 1$ deixa resto 1 na divisão por 3, então existe um inteiro q tal que $a + 1 = 3q + 1$ e, logo, $a = 3q$. Como $a = 3q$, então $7a + 4 = 7(3q) + 4 = 3(7q) + 3 + 1 = 3(7q + 1) + 1$ e, logo, o resto da divisão de $7a + 4$ por 3 é igual a 1.

Critérios de correção da Questão

Esta questão vale 5 pontos, distribuídos da seguinte maneira:

- Escreveu $a + 1 = 3q + 1$: 2,0 pontos;
- Escreveu que $7a + 4 = 3(7q + 1) + 1$: 2,0 pontos;
- Concluiu que o resto da divisão de $7a + 4$ por 3 é igual a 1: 1,0 ponto.

Observem como seria a correção de lá! Isso que vcs encararão na seguynda fase!

SOLUÇÃO DA 5 (PADRÕES DO IMPA, ONDE VALERIA 5 PTS):

Solução da Questão

Sejam x e y as quantidades de saquinhos de balas de coco e de balas de chocolate, respectivamente. Seja w a quantidade de balas em cada saquinho. Então, deve-se ter $84 = xw$ e $144 = yw$. Assim, w é divisor comum de 84 e 144. Como w deve ter o maior valor possível, então w deve ser igual ao mdc de 84 e 144, que é igual a 12. Assim, deve-se colocar 12 balas em cada saquinho e deve-se formar $\frac{84}{12} = 7$ saquinhos de balas de coco e $\frac{144}{12} = 12$ saquinhos de balas de chocolate.

Critérios de correção da Questão

Esta questão vale 5 pontos, distribuídos da seguinte maneira:

- Concluiu que a quantidade de balas em cada saquinho é divisor comum de 84 e 144: 1,5 pontos;
- Concluiu que a quantidade de balas em cada saquinho é o mdc de 84 e 144: 1,0 pontos;
- Achou corretamente o mdc de 84 e 144: 1,5 pontos;
- Achou corretamente a quantidade de balas em cada saquinho e a quantidade de saquinhos de cada tipo de bala: 1,0 pontos.