Capítulo 2

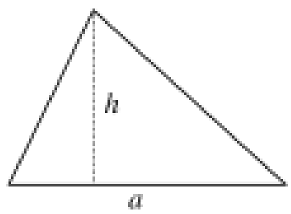
Áreas

Os alunos, em geral, trabalham com áreas desde muito cedo. Vamos então, neste capítulo, imaginar que as fórmulas que calculam áreas das figuras simples como o quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo e trapézio sejam conhecidas.

Inicialmente, daremos toda atenção ao triângulo. Conhecendo bem o triângulo, não teremos dificuldade nos polígonos pois, afinal, eles podem ser decompostos em triângulos. Com certeza, você já sabe calcular a área de um triângulo, fazendo a metade do produto da base pela altura.

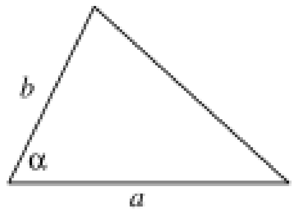
1. A fórmula tradicional.

$$S = \frac{ah}{2}$$



2. Se você já conhece um pouco de trigonometria, a fórmula seguinte é muito boa.

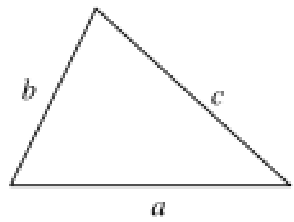
$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \text{sen}\alpha$$



3. Quando os três lados são conhecidos, calcular a altura ou um dos ângulos dá algum trabalho. Nesse momento, a fórmula de Heron é ótima (não daremos aqui a demonstração dela).

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

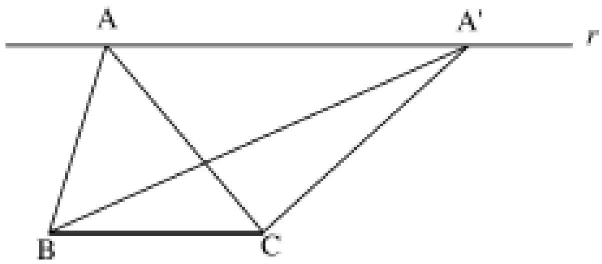


Vamos tratar agora do mais importante: as propriedades.

2.1 Propriedades Importantes

Propriedade 1

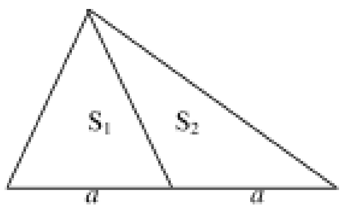
A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base.



Na figura acima, a reta r é paralela a BC. Os triângulos ABC e $A'BC$ têm mesma área, pois possuem mesma base e mesma altura.

Propriedade 2

Em um triângulo, uma mediana divide sua área em partes iguais.



$S_1 = S_2$

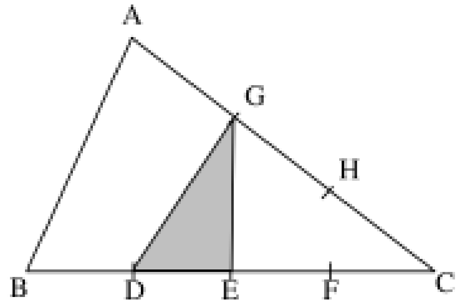
De fato, os dois triângulos interiores possuem mesma base e mesma altura. Logo, possuem mesma área.

Quando duas figuras possuem mesma área, dizemos que elas são equivalentes. Portanto, o enunciado desta propriedade pode ser: "Uma mediana divide o triângulo em dois outros equivalentes."

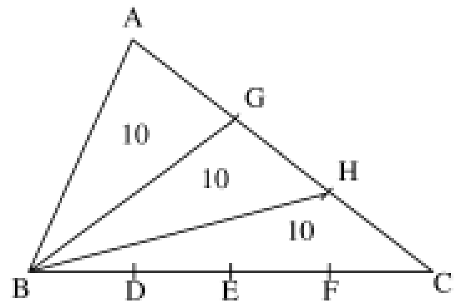
Antes de prosseguir com as propriedades, vamos resolver dois exercícios cujos enunciados não são comuns nos livros didáticos atuais.

Exercício 1

O triângulo ABC da figura abaixo tem área igual a 30. O lado BC está dividido em quatro partes iguais, pelos pontos D, E e F, e o lado AC está dividido em três partes iguais pelos pontos G e H. Qual é a área do triângulo GDE?

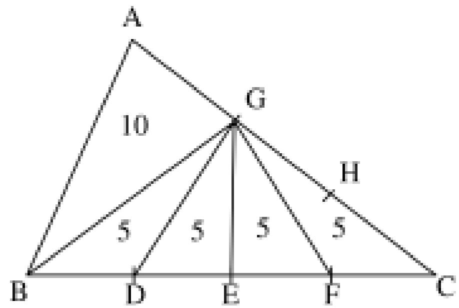


Solução: Observe o triângulo ABC com as cevianas BG e BH.



Pela propriedade 2 os triângulos BAG, BGH e BHC têm mesma área. Cada um tem, portanto, área igual a 10 e o triângulo BGC tem área igual a 20.

Observe agora o triângulo BGC com as cevianas GD, GE e GF.

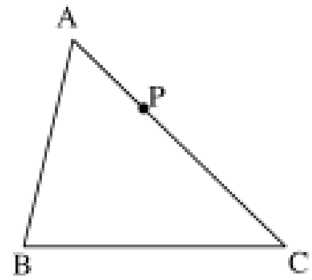


Pela mesma propriedade, os triângulos GBD, GDE, GEF e GFC têm mesma área. Logo, cada um deles tem área 5. A área do triângulo GDE é igual a 5.

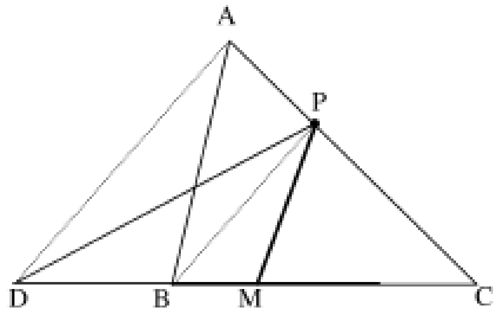
Repare que a solução do problema não necessitou de fórmulas. Uma propriedade simples e convenientemente aplicada resolveu a questão. Vamos ver outro problema.

Exercício 2

É dado um triângulo ABC e um ponto P do lado AC mais próximo de A que de C. Traçar uma reta por P que divida o triângulo ABC em duas partes de mesma área.



Solução: Façamos o seguinte. Trace BP e uma paralela a BP por A que encontra a reta BC em D.

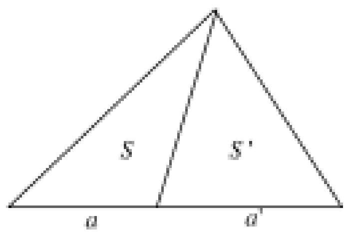


Os triângulos ABP e DBP têm áreas iguais pela propriedade 1. Assim, o triângulo PDC tem mesma área que o triângulo ABC. Mas, tomando o ponto médio M de DC, a reta PM divide PDC em duas partes de mesma área (propriedade 2). Logo, PM divide também ABC em duas partes de mesma área.

Vamos continuar com mais duas propriedades importantes.

Propriedade 3

Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. A afirmação acima tem comprovação imediata a partir da fórmula que calcula a área do triângulo.

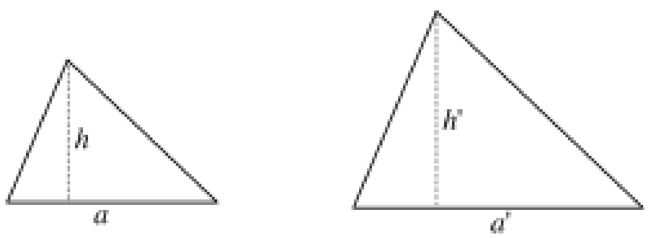


$$\frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$$

Propriedade 4

A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Observe, na figura a seguir, dois triângulos semelhantes com bases a e a' e alturas h e h'.



Como são semelhantes, a razão entre as bases é a mesma razão entre