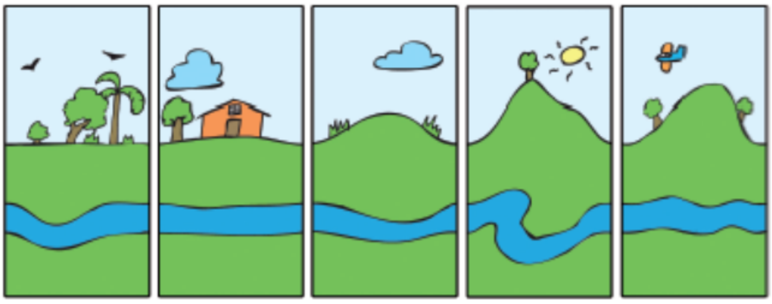
CONTAGEM

Exercício 1(OBMEP 2011) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?



(a) uma semana
(b) um mês
(c) dois meses
(d) quatro meses
(e) seis meses

Solução: Temos cinco posições distintas para colocarmos quadros também distintos. Na primeira posição temos 5 escolhas distintas possíveis. Na segunda, temos 4 escolhas possíveis, e assim por diante. Pelo Princípio Multiplicativo, podemos formar $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ paisagens distintas. Como um mês tem, aproximadamente 30 dias, podemos mudar a paisagem por aproximadamente $\dfrac{120}{30} = 4$ meses.

Exercício 2 (OBMEP 2015) Maria faz uma lista de todos os números de dois algarismos usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. Por exemplo, os números 20 e 22 estão na lista de Maria, mas 02 não. Quantos números diferentes há nessa lista?
(a) 8
(b) 9
(c) 10
(d) 12
(e) 16

Solução: No número 2015 temos quatro algarismos. Como os números procurados devem possuir 2 algarismos então temos 3 opções de escolha para o algarismo da esquerda (já que o 0 não pode ser utilizado) e temos 4 opções de números para o algarismo da direita. Assim, temos $3 \times 4 = 12$ números diferentes.

Exercício 3 (OBMEP 2008) Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma branca, uma azul e uma verde, e quatro calças: uma marrom, uma preta, uma azul e uma verde. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?
(a) 12
(b) 14
(c) 17
(d) 18
(e) 20

Solução: Para cada uma das camisas pretas e azul é possível escolher três calças de cor diferente, num total de $3 \times 3 = 9$ possibilidades; notamos que estar com uma camisa preta de mangas curtas é diferente de estar com uma de mangas compridas. Para as camisas cinza e branca podemos escolher qualquer calça, num total de $2 \times 4 = 8$ possibilidades. Ao final, temos $9 + 8 = 17$ possibilidades.

Exercício 4 (OBMEP 2012) Quantos são os números naturais entre 0 e 999 nos quais aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3?
(a) 192
(b) 204
(c) 217
(d) 225
(e) 254

Solução: Podemos pensar nos números naturais entre 0 e 999 como sequâncias de três algarismos de 000 até 999. Estamos interessados em contar as sequências em que pelo menos um algarismo 2 aparece e nenhum algarismo seja 3. Para fazer esta contagem, vamos chamar de a o número sequências em que o número 3 não aparece. Essas sequências se dividem em dois tipos: aquelas em que o algarismo 2 não aparece (que chamaremos que b) e aquelas em que o algarismo 2 aparece (que chamaremos de c). Temos que $c = b - a$; basta calcular a e b. Temos que $a = 9 \times 9 \times 9$ (já que não podemos usar o número 3) e $b = 8 \times 8 \times 8$ (já que não podemos usar os números 2 e 3). Logo, $c = 9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 729 - 512 = 217$.

Exercício 5 (OBMEP 2010) De quantas maneiras é possível escolher três números inteiros de 1 a 19, de modo que o maior e o menor sejam ímpares e o outro seja par?
(a) 165
(b) 150
(c) 140
(d) 125
(e) 100

Solução: O número central pode ser qualquer dos pares de 2 a 18. Se o número central é 2, há um único ímpar de 1 a 19 menor que ele e 9 ímpares maiores que ele; logo há $1 \times 9 = 9$ triplas nesse caso. Se o número central é 4, há 2 ímpares menores e 8 ímpares maiores que ele; nesse caso temos $2 \times 8 = 16$ triplas. Continuando esse processo, vemos que o número total de triplas é

$$1 \times 9 + 2 \times 8 + 3 \times 7 + 4 \times 6 + 5 \times 5 + 4 \times 6 + 3 \times 7 + 2 \times 8 + 1 \times 9 = 165$$

Exercício 6 (OBMEP 2014) O número 2014 tem quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0. Quantos números possuem exatamente essas características?
(a) 60
(b) 180
(c) 360
(d) 420
(e) 540

Solução: Vamos fazer essa contagem pensando em colocar os algarismos na unidade, dezena, centena e unidade de milhar do número. Como se trata de um número de quatro algarismos, o algarismo 0 não pode ser colocado na unidade de milhar. Temos então 3 possibilidades para colocar o algarismo 0. Colocado o zero sobram três posições para se colocar o algarismo ímpar, e como há cinco algarismos ímpares, temos um total de 15 possibilidades para se colocar o algarismo ímpar no número. Colocado o algarismo 0 e o algarismo ímpar, sobram duas posições para se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos. Fazemos a escolha do primeiro algarismo par não nulo e o colocamos na primeira posição ainda não preenchida do número (há 4 possibilidades de escolha: $2, 4, 6$ e 8). Finalmente, preenchemos a última posição com o outro número par não nulo, diferente daquele colocado (há 3 possibilidades). Temos assim 12 possibilidades de se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos no número.
Pelo Princípio Multiplicativo, o total de possibilidades é $3 \times 15 \times 12 = 540$.

Exercício 7 (OBMEP 2015) Apertando teclas de zero a nove de um cofre, Pedro cria uma senha de 11 algarismos.
(A) Quantas são as senhas que começam com 20152015?

Solução: Para criar uma senha de 11 algarismos que inicie com o bloco 20152015, Pedro precisa apenas determinar os três últimos algarismos que definem a senha.
Ele pode usar qualquer um dos 10 alagrismos na antepenúltima, penúltima e última posição da senha. Pelo Princípio Multiplicativo, há $10 \times 10 \times 10 = 1000$ possibilidades.

(B) Quantas são as senhas que contêm todos os algarismos juntos e em ordem crescente, isto é, quantas são as senhas que contêm o bloco 0123456789?

Solução: Como o bloco 0123456789 é formado por 10 algarismos, resta acrescentar 1 algarismo para se criar uma senha. Esse algarismo deve ser colocado ou na primeira ou na última posição, para não "quebrar" o bloco.
Na primeira posição é possível colocar 10 algarismos. E o mesmo ocorre para a última posição. Assim, pelo Princípio Aditivo temos $10 + 10 = 20$ senhas diferentes.

(C) Pedro quer criar uma senha de forma que, quando se exclui um de seus algarismos, restam os algarismos de 0 a 9 em ordem crescente. Por exemplo, 80123456789 e 01234456789 são senhas possíveis, mas 01324567890 não. Nessas condições, quantas senhas Pedro pode criar?

Solução: Para se criar uma senha de acordo com as novas condições exigidas, devemos inserir um algarismo no bloco 0123456789: à esquerda, à direita ou entre dois de seus algarismos.Há, portanto, 11 espaços possíveis para se inserir um dos dez algarismos. Logo, há, nas condições exigidas, $11 \times 10 = 110$ possibilidades de se criar uma senha. Entretanto, algumas dessas senhas criadas são repetidas, e devemos descontá-las da nossa contagem. Observamos um exemplo: a senha 00123456789 pode ser obtida de duas maneiras distintas:

• coloca-se 0 à esquerda do número 0123456789

• coloca-se 0 entre 0 e 1 do número 0123456789.

Cada um dos algarismos de 0 a 9 pode gerar uma e só uma duplicação de senha. Assim, devemos descontar da contagem inicial uma senha para cada algarismo. Há, portanto, $110 - 10 = 100$ possibilidades de senhas que Pedro pode criar.

Exercício 8 (OBMEP 2012) Vítor tem 24 cartões, sendo oito azuis, oito brancos e oito verdes. Para cada cor, ele numerou os cartões de 1 a 8.
(A) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões azuis de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

Solução: o número 9 pode ser escrito como soma de duas parcelas inteiras de quatro maneiras diferentes: $9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$. Como a ordem em que os cartões são escolhidos não altera sua soma, segue que Vítor pode escolher dois cartões azuis cujos números somam 9 de 4 maneiras distintas.

(B) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

Solução: Como visto no item (A), podemos escrever 9 como a soma de dois números de 1 a 8 de quatro maneiras:$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$. No caso de cartões com a mesma cor, escolhemos uma das expressões de 9como soma e depois a cor dos cartões; como as cores são em número de 3, isto pode ser feito de $4 \times 3 = 12$ maneiras.
No caso dos cartões terem cores diferentes, escolhemos uma das expressões de 9, a cor de um dos cartões e uma cor diferente para o outro cartão, isto pode ser feito de $4 \times 3 \times 2 = 24$ modos distintos. Assim, no total é possível escolher os cartões de $12 + 24 = 36$ maneiras distintas.

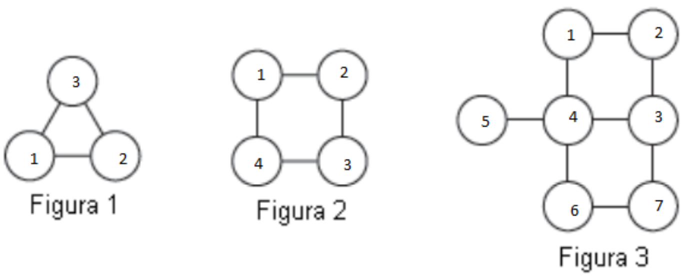
(C) De quantas maneiras Vítor pode escolher 3 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

Solução: Para fazer uma escolha possível, Vítor deve pegar um trio de cartões cuja soma seja igual a 9. Quanto aos números, há sete possibilidades para esses trio: $9 = 1+1+7 = 1+2+6 = 2+2+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$.Observamos que estes trios são de três tipos diferentes:

- $(3, 3, 3)$: os três números são iguais;
- $(1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4)$: os três números são distintos;
- $(1, 1, 7), (1, 4, 4), (2, 2, 5)$: um número é reptido duas vezes e o terceiro é diferente

Há uma única maneira de esoclher cartões para o trio $(3, 3, 3)$, a saber, um de cada cor. Já para os trios do segundo tipo, cada um dos números pode aparecer em qualquer das cores; nesse caso, há $3 \times 3 \times 3 = 27$ maneiras de escolher um desses trios. Como são 3 trios, o total é $3 \times 27 = 81$ possibilidades.
Para um trio do terceiro tipo, devemos escolher duas cores distintas, para os números distinto, o que pode ser feito de 3 maneiras (AB,AV,BV) e depois uma cor qualquer para o número diferente, o que pode ser feito de 3 maneiras. Nesse caso, o total de possibilidades é $3 \times 3 = 9$; como são 3 trios desse tipo, obtems $3 \times 9 = 27$ possibilidades.
Finalmente, o número total de possibilidades é $1 + 81 + 27 = 109$.

Exercício 9 (OBMEP 2009) Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul, preto ou vermelho de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir cada uma destas figuras?



Solução:
(a) Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a figura 1 pode ser pintada de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes.

(b) Vamos dividir as maneiras de pintar a figura 2 em dois casos.
1º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor. Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3 \times 2 \times 2 = 12$.

2º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3 \times 2 = 16$.
No total, a figura 2 pode ser pintada de $12 + 6 = 18$ maneiras diferentes.

(c) As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ela tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo temos $18 \times 2 = 36$ possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5. Dividimos agora nossa contagem em dois casos:
1º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor. Nesse caso, temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos $1 \times 2 = 2$ possibilidades.

2º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade.
No total, há $36 \times 2 + 36 \times 1 = 108$ maneiras diferentes de pintar a figura 3.

Exercício 10 (OBMEP 2005) Pedrinho escreveu todos os números inteiros compreendidos entre 100 e 999 cuja soma dos algarismos é 12.Por exemplo, os números 129 e 750 aparecem entre os números escritos.
(A) Quantos números escritos têm apenas dois algarismos iguais?

Solução: O algarismo 1 não pode ser repetido porque não é possível escrever 12 como uma soma da forma $1 + 1 + x$ onde x é um algarismo; de fato, como x é no máximo 9, esta soma será no máximo 11. O algarismo 4 também não pode ser repetido pois neste caso o número teria que ser 444, que tem três algarismos iguais e não está de acordo com o enunciado. Finalmente, os algarismos 7, 8 e 9 não podem ser repetidos, pois neste caso a soma dos algarismos ultrapassaria 12. Assim, o algarismo repetido só pode ser 2, 3, 5 ou 6. Com 2, 3 e 5 podemos formar 9 números: $228, 282, 822, 336, 363, 633, 552, 525$ e 255. Com o algarismo 6 podemos formar 2 números: 606 e 660. Portanto a quantidade de números escrita é $9 + 2 = 11$.

(B) Quantos números escritos são formados apenas por algarismos ímpares?

Solução: A soma de três números ímpares é um número ímpar. Como 12 é par, vemos que é impossível achar três algarismos ímpares cuja soma é 12. Logo nenhum dos números escritos tem os três algarismos ímpares.