

**Formação de Professores da Educação Básica e de Alunos de Licenciatura  
OBMEP na Escola e PIC 2016  
Grupo N1 - Ciclo 4**

O Programa Acadêmico desta formação de professores e alunos de licenciatura é constituído de 6 ciclos de 4 encontros cada. Neste terceiro ciclo serão realizados os seguintes encontros:

- Quarto encontro de formação entre professores, alunos e o coordenador
- Aritmética 4
- Contagem 4
- Geometria 4

**Quarto encontro entre professores e alunos de licenciatura com o coordenador**

No início de todos os ciclos, a primeira atividade a ser realizada é o encontro de formação entre professores e alunos de licenciatura com os coordenadores. Neste encontro espera-se que sejam discutidos os conteúdos, os materiais, as videoaulas e os exercícios propostos dos três assuntos que serão ministrados nas aulas para os alunos medalhistas e convidados.

Antes da realização deste encontro de formação recomendamos que os professores, os alunos e os coordenadores:

- façam um estudo preliminar de todo este roteiro.
- assistam os vídeos indicados do Portal da Matemática ou do canal PICOBEMP no YouTube.
- resolvam os exercícios propostos.
- anotem suas dúvidas.

Durante esse encontro de formação deseja-se que:

- Seja realizado um estudo dos materiais indicados de aritmética, de contagem e de geometria e que sejam esclarecidas as dúvidas.
- Caso exista infra-estrutura disponível, sejam discutidas algumas videoaulas.
- O Coordenador deve promover discussões dos conceitos e dos exercícios mais importantes das aulas que serão ministradas para os alunos sobre os temas de aritmética, contagem e geometria.
- O Coordenador auxilie os professores na preparação das aulas.

- Ocorra uma troca de experiências e o compartilhamento de ideias entre os professores, os alunos e os coordenadores.

- Assuntos a serem abordados (temas das aulas para alunos medalhistas e convidados)

**Aritmética:** máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.

**Contagem:** resolução de problemas da obmep.

**Geometria:** paralelismo: retas paralelas cortadas por uma transversal.

No que segue vamos detalhar os conteúdos destas três aulas, indicando as referências bibliográficas e as videoaulas relacionadas. Este detalhamento pode ser utilizado tanto no encontro de formação entre professores e alunos de licenciatura com os coordenadores, quanto como o roteiro da aula que deve ser ministrada para os alunos medalhistas e convidados.

#### **Aritmética 4: máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.**

- Assuntos a serem abordados:

**Aritmética** – máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.

- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos as seções 3.1, 3.2 e 3.4 da apostila do PIC “Encontros de Aritmética”, F. Dutenehner, L. Cadar.  
<http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf>

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:

6º Ano do Ensino Fundamental – Módulo “Divisibilidade” – Aula “MDC e MMC”

– videoaula:

- [Máximo divisor comum](#)
- [Propriedades do mdc](#)
- [Mínimo múltiplo comum](#)
- [Propriedades do mmc](#)

- Sugestão para o desenvolvimento da aula: Nesta aula vamos fazer um estudo do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum. Sugerimos que os professores comecem explorando os três primeiros exemplos da seção 3.1 e os três primeiros exemplos resolvidos da seção 3.2 da apostila Encontros de Aritmética. Estes exemplos motivam e deixam claro para o aluno os conceitos, as definições, do mdc e do mmc, promovendo que estes conceitos façam mais sentido para os alunos. Somente após o entendimento dos conceitos, sugerimos que os professores passem para o estudo de técnicas que permitem o cálculo do mdc e do mmc.

A primeira maneira de se calcular o  $mdc(a,b)$  é através da listagem dos divisores de  $a$ , dos divisores de  $b$ , e a identificação do maior divisor comum de  $a$  e de  $b$ . Esta estratégia para o cálculo do mdc deve ser explorada para os alunos. E de modo análogo, o cálculo do  $mmc(a,b)$  através da listagem dos múltiplos de  $a$  e de  $b$  também deve ser explorada. Estas estratégias foram utilizadas na resolução dos exemplos das seções 3.1 e 3.2.

Em seguida na seção 3.3 da apostila Encontros de Aritmética é aplicada a teoria estudada no encontro anterior para o cálculo de mdc e de mmc de dois números já fatorados. Sugerimos que os professores utilizem, então, o que foi feito no ciclo 2 sobre fatoração para, dado um número fatorado: identificar os seus múltiplos e os seus divisores. O exercício 7 (página 73) e o exercício 11 (página 76) ilustram o que estamos pretendendo com isso:

**Exercício 7:** Se  $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$  identifique quais dos seguintes números são divisores de  $a$ .

- (a)  $2^2 \cdot 5$
- (b)  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
- (c)  $2 \cdot 5^2 \cdot 7$
- (d) 11
- (e)  $2^3 \cdot 7$

**Exercício 11:** Se  $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$  identifique quais dos seguintes números são múltiplos de  $a$ .

- (a)  $2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3$
- (b)  $2 \cdot 3 \cdot 7^4 \cdot 13^2$
- (c)  $2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$
- (d)  $2^3 \cdot 5 \cdot 7^6 \cdot 13 \cdot 19^2$
- (e)  $2^7 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 60$

Após explorar estas atividades nestes e em outros exercícios se for o caso, fica mais fácil apresentar o algoritmo para o cálculo do mdc e do mmc de dois números já fatorados.

No Portal da Matemática, no 6º Ano do Ensino Fundamental, no Módulo “Divisibilidade”, na Aula “mdc e mmc” existem 37 exercícios resolvidos e existem dois materiais teóricos que podem ser adaptados para serem utilizados neste ciclo. Sugerimos que em algum momento da aula, o professor apresente alguma coisa que está no Portal da Matemática para os seus alunos e que o professor motive os alunos continuarem estudando em casa através da apostila, das videoaulas e dos exercícios resolvidos no Portal.

Pode ser que durante a aula presencial, não seja possível a discussão de todos os exercícios das seções 3.1, 3.2 e 3.3 da apostila Encontros de Aritmética. Isto não tem problema algum, pois o estudo dessas seções vai continuar no Fórum Hotel de Hilbert. Na aula presencial, o professor deve cuidar para que pelo menos os principais tópicos sejam abordados. Para deixar mais claro o que isso significa, apresentamos alguns exercícios da apostila que o professor não pode deixar de discutir na aula.

Exercícios de 1 a 6 – páginas 64-72

Exercício 10 – página 75

Exercício 13 – página 77

Ao final da aula, o professor deve incentivar que os alunos participem do Portal da Matemática, assistindo as videoaulas sugeridas, estudando os exercícios resolvidos e realizando os testes das respectivas aulas.

#### Contagem 4: resolução de exercícios da obmep

No ciclo 1 estudamos o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. No ciclo 2 estudamos o conceito de permutação e resolvemos alguns exercícios de contagem. E no ciclo 3 resolvemos alguns exercícios de questões de provas anteriores da obmep.

Neste quarto ciclo vamos continuar exercitando a teoria estudada resolvendo outros exercícios de provas anteriores da obmep.

No que segue, organizamos uma outra coletânea de algumas questões de contagem retiradas de provas da obmep. Sugerimos que os professores entreguem os enunciados destas questões para os alunos e trabalhem com essas questões nesta aula de contagem.

#### **Exercício 1. (OBMEP 2016 – N2Q12 – 1ª fase)**

Cada livro da biblioteca municipal de Quixajuba recebe um código formado por três das 26 letras do alfabeto. Eles são colocados em estantes em ordem alfabética: AAA, AAB, ..., AAZ, ABA, ABB, ..., ABZ, ..., AZA, AZB, ..., AZZ, BAA, BAB e assim por diante. O código do último livro é DAB. Quantos livros há na biblioteca?

- (a) 676
- (b) 1352
- (c) 2016
- (d) 2028
- (e) 2030

#### **Exercício 2. (OBMEP 2015 – N2Q18 – 1ª fase)**

Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

- (a) 20
- (b) 30
- (c) 60
- (d) 90
- (e) 120

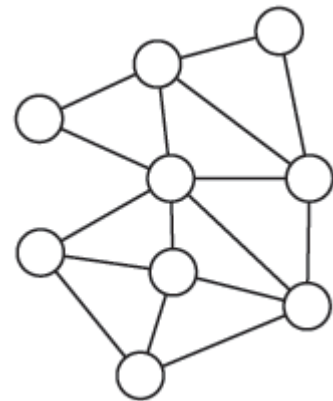
**Exercício 3. (OBMEP 2014 - N1Q20 – 1ª fase)**

Quantos são os números ímpares, de cinco algarismos, nos quais a soma dos algarismos das unidades e das dezenas é 16 e a soma de todos os algarismos é um múltiplo de 5?

- (a) 90
- (b) 180
- (c) 216
- (d) 360
- (e) 532

**Exercício 4. (OBMEP 2012 - N1Q13 – 1ª fase)**

De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?



- (a) 2
- (b) 3
- (c) 4
- (d) 6
- (e) 9

**Exercício 5. (OBMEP 2012 - N2Q5 – 2ª fase)**

Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura a seguir, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.



- (A) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de  $3 \times 2 \times 2$  maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?
- (B) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?
- (C) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?
- (D) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

**Exercício 6. (OBMEP 2011 - N1Q4 – 2ª fase)**

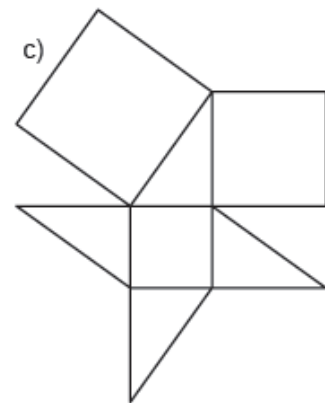
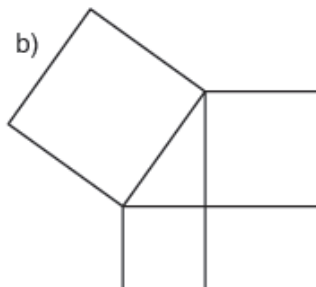
Cristina gosta de adivinhar em quais casinhas seus ratinhos Mingo, Lingo e Tingo irão se esconder, após ser aberta a gaiola em que eles moram. As casinhas são numeradas de 1 a 6 e dois ou mais ratinhos podem se esconder na mesma casinha. Ela registra suas previsões em cartões como os da figura, marcando um X em cada linha.



- (A) De quantas maneiras Cristina pode preencher um cartão?
- (B) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que os ratinhos se esconderão em três casinhas diferentes?
- (C) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente?

**Exercício 7. (OBMEP 2011 - N2Q5 – 2ª fase)**

João vai pintar figuras compostas por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor. Determine de quantas maneiras João pode pintar cada uma das seguintes figuras.



**Exercício 8. (OBMEP 2010 - N1Q15 – 1ª fase)**

Um número natural é chamado número *circunflexo* quando:

- ele tem cinco algarismos;
- seus três primeiros algarismos a partir da esquerda estão em ordem crescente;
- seus três últimos algarismos estão em ordem decrescente.

Por exemplo, 13864 e 78952 são números circunflexos, mas 78851 e 79421 não o são. Quantos são os números circunflexos maiores do que 77777?

- (a) 30
- (b) 36
- (c) 42
- (d) 48
- (e) 54

**Exercício 9. (OBMEP 2008 - N2Q20 – 1ª fase)**

As peças da figura 1 são feitas de quadradinhos de cartolina cinza de um lado e branca do outro. A figura 3 mostra uma maneira de encaixar essas peças com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da figura 2. De quantas maneiras diferentes é possível fazer isso?

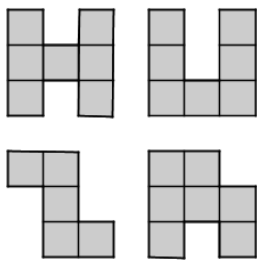


Figura 1

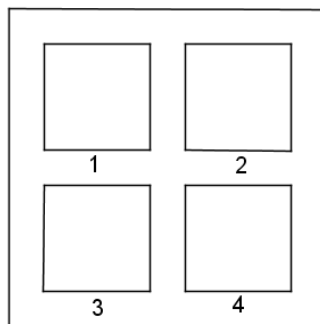


Figura 2

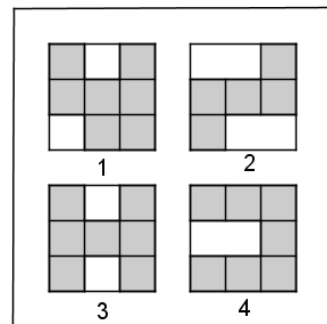


Figura 3

- (a) 1024
- (b) 1536
- (c) 2048
- (d) 3072
- (e) 4096

**Exercício 10. (OBMEP 2007 - N1Q19 – 1ª fase)**

Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. O quarto é quadrado e ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

- (a) 8
- (b) 16
- (c) 18
- (d) 20
- (e) 24



**Exercício 11. (OBMEP 2006 - N1Q7 – 1ª fase)**

Dois casais estão sentados em um banco de um parque, posando para uma fotografia. De quantas maneiras diferentes essas quatro pessoas podem se sentar de modo que cada marido apareça ao lado de sua esposa na fotografia?

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4
- (e) 8

**Exercício 12. (OBMEP 2006 - N2Q15 – 1ª fase)**

De quantas maneiras três casais podem se sentar em um banco de modo que cada marido fique sempre ao lado de sua mulher?

- (a) 6
- (b) 12
- (c) 44
- (d) 46
- (e) 48

**Exercício 13. (OBMEP 2005 - N1Q9 – 1ª fase)**

O Campeonato Brasileiro de Futebol de 2005 foi disputado por 22 times. Cada time enfrenta cada um dos outros duas vezes, uma vez em seu campo e outra no campo do adversário. Quantas partidas serão disputadas por cada time?

- (a) 40
- (b) 41
- (c) 42
- (d) 43
- (e) 44

**Exercício 14. (OBMEP 2005 - N1Q15 – 1ª fase)**

Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

- (a) 32
- (b) 36
- (c) 45
- (d) 46
- (e) 48

## Geometria 4: paralelismo, retas paralelas cortadas por uma transversal

- Assuntos a serem abordados:

**Geometria** – paralelismo, retas cortadas por uma transversal

- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos as seções 6.1 e 6.2 da apostila do PIC “Encontros de Geometria”, F. Dutenhfner, L. Cadar. <http://www.obmep.org.br/docs/Geometria.pdf>.

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:

8º Ano do Ensino Fundamental – Módulo: “elementos básicos de geometria plana – parte 1” – Aula: “retas paralelas cortadas por uma transversal” – Vídeoaulas:

- [Posição relativa entre retas](#)

8º Ano do Ensino Fundamental – Módulo: “elementos básicos de geometria plana – parte 2” – Aula: “retas paralelas cortadas por uma transversal” – Vídeoaulas:

- [Atravessando um rio...retas cortadas por uma transversal](#)
- [Resolvendo o problema do rio](#)
- [Teorema dos Bicos](#)
- [Soma dos ângulos de um triângulo](#)

- Sugestão para o desenvolvimento da aula:

Esta aula poderia começar com o estudo das posições relativas de duas retas distintas: concorrentes ou paralelas. Este estudo está desenvolvido na seção 6.1 da apostila Encontros de Geometria e também está muito bem explicado na videoaula [Posição relativa entre retas](#) do Portal da Matemática.

Em seguida, o professor pode investigar a questão da verificação do paralelismo de duas retas (ver página 51 da apostila) e confirmar com os alunos de que é necessário alguma informação precisa para se garantir que duas retas são, de fato, paralelas. Através desta motivação definir ângulos alternos internos, colaterais, correspondentes, etc, e apresentar o teorema da página 54 da apostila Encontros de Geometria. Explorar este teorema resolvendo os exemplos de 1 a 4 das páginas 57. Resolver alguns exercícios das páginas 57-60.

No ciclo anterior, foi apresentada uma atividade de dobradura para motivar o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Agora, após o estudo de paralelismo, este resultado pode ser formalmente demonstrado, como na seção 6.2 da

apostila Encontros de Geometria. Sugerimos que o professor faça esta demonstração na sala de aula e que ele trabalhe com todos os exercícios desta seção.

No Portal da Matemática, nas videoaulas indicadas existem outros exercícios sugerido e outros materiais teóricos para enriquecer o estudo. Todos esses exercícios e estes materiais fazem parte deste planejamento e o professor deve incentivar que os alunos utilizem estes matérias para o seu estudo em casa.

Caso seja necessário, o professor também pode utilizar a sua experiência didática, o seu conhecimento da turma, propondo outras formas didáticas e outros exercícios, desde que sejam dos conteúdos indicados neste ciclo.