Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Semelhanças entre Figuras e Polígonos.

8^o **ano/**9^a **série E.F.**

Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales
Semelhanças entre Figuras e Polígonos.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Observe a figura abaixo e responda:

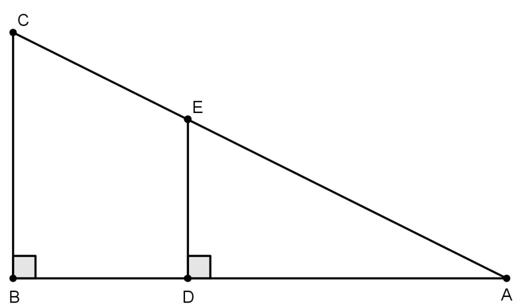

Figura 1

a) os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são semelhantes?

b) caso sejam semelhantes, quais são os lados homólogos?

Exercício 2. Determine se os triângulos $\triangle KLM$ e $\triangle MPQ$ são semelhantes.

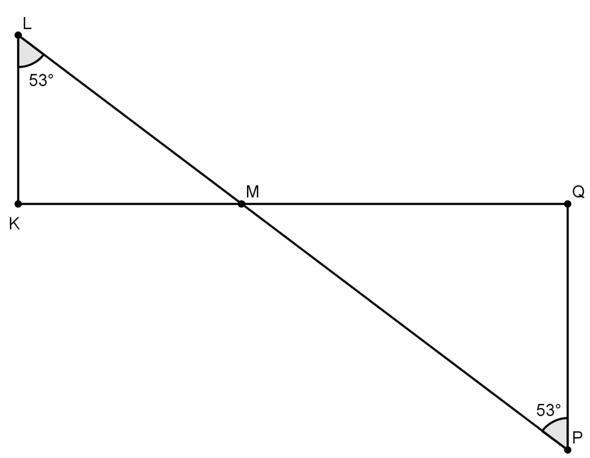

Figura 2

Exercício 3. Qual a razão de semelhança dos triângulos abaixo?

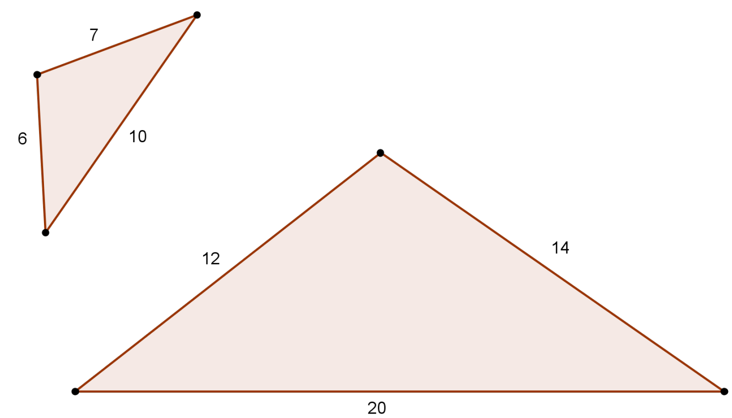

Figura 3

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Como João pode medir a altura de um poste, conhecendo sua altura, $1,60$m, o comprimento de sua sombra, 2m, o comprimento da sombra do poste no mesmo instante que mediu sua sombra, 7m?

Exercício 5. Na figura abaixo, $BC = 12$cm e $AH = 8$cm, sendo $\overline{AH}$ altura do $\triangle ABC$. Determine o lado do quadrado $MNPQ$.

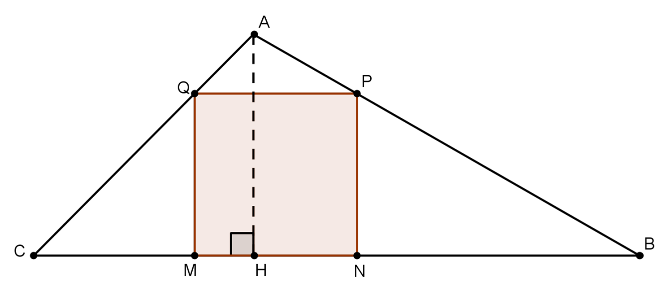

Figura 4

Exercício 6. Na figura abaixo, temos uma reta que passa pelos pontos A, B e C e outra que passa por A e é tangente às circunferências de centros B e C e raios 3cm e 5cm. Se $AB = 7$cm, determine BC.

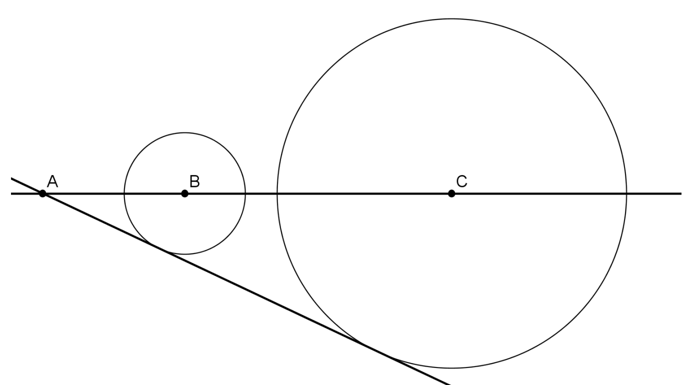

Figura 5

Exercício 7. Sabendo que $AB = 15$, $BC = 20$, $AD = 10$ e $DC = 15$, determine a medida de $\overline{DE}$ na figura abaixo.

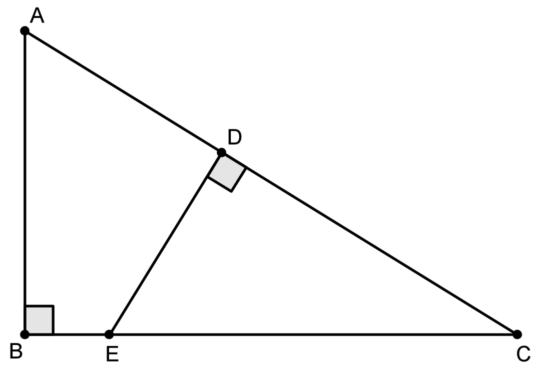

Figura 7

Exercício 8. Na figura abaixo, temos $AC = 4$ e $AB = 6$. Determine o perímetro do quadrado $AEDF$.

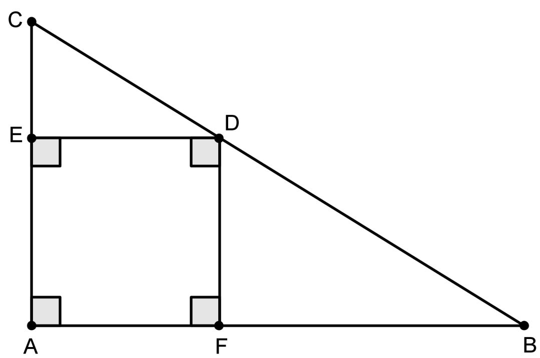

Figura 8

Exercício 9. No retângulo da figura abaixo temos que $AB = 20$, $BC = 12$ e $AM = MB$. Detemine a medida de $\overline{EF}$.

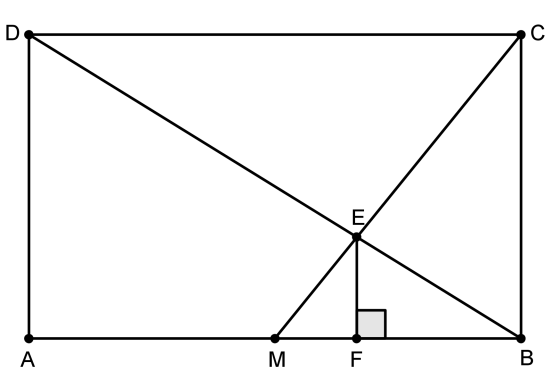

Figura 9

Exercício 10. Determine x na figura abaixo, na qual existem três quadrados de lados 9, x e 4.

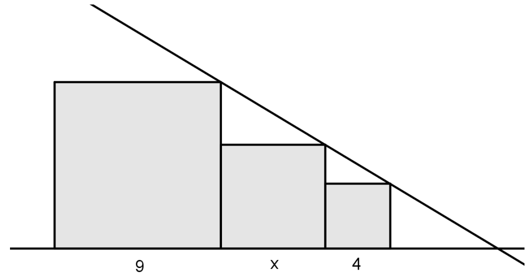

Figura 10

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Na figura abaixo, temos um triângulo inscrito. Se $AB = 10$, $AC = 12$ e $AH = 4$, determine o raio da circunferência.

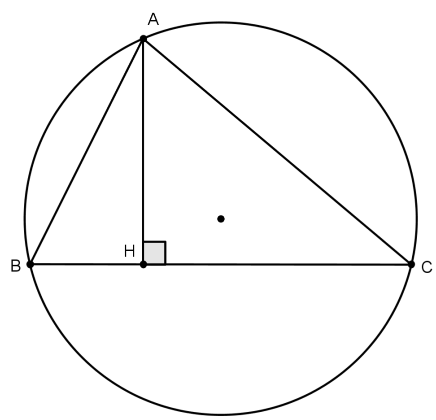

Figura 12

Exercício 12. Na figura abaixo, temos $AC = CB = 10$cm, $AB = 6$cm e $AM = MB$. Além disso, o segmento BH tangencia a semicircunferência com centro em M. Determine o raio dessa semicircunferência.

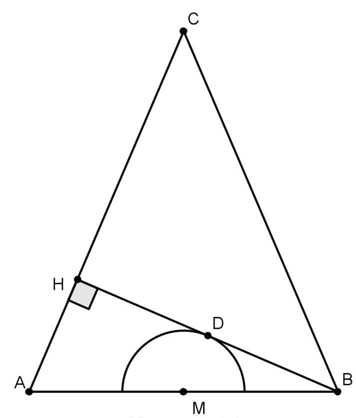

Figura 14

Exercício 13. Na figura abaixo, temos duas semicircunferências. Se $AD = 36$ e $BC = CD$, determine CD.

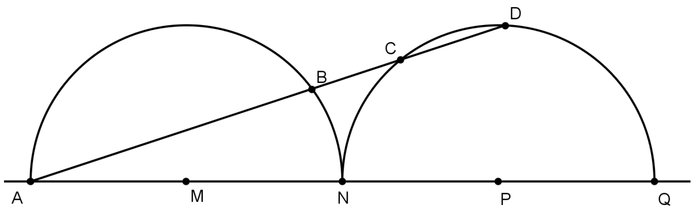

Figura 15

Exercício 14. Na figura abaixo, $\overline{DE}//\overline{AC}$, $\angle ACD \equiv \angle BCD$, $BC = m$ e $AC = n$. Determine a medida de $\overline{DE}$ em função de m e n.

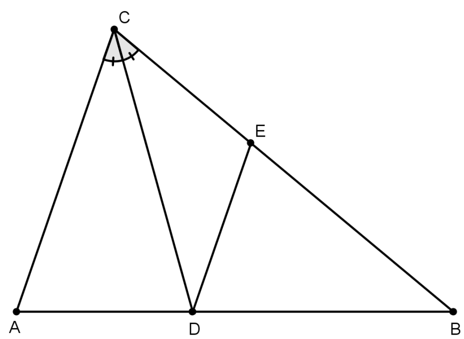

Figura 17

Exercício 15. No desenho abaixo, o triângulo ABC é equilátero e $BD = CE = AF = AB/3$. Determine a razão EG/GD.

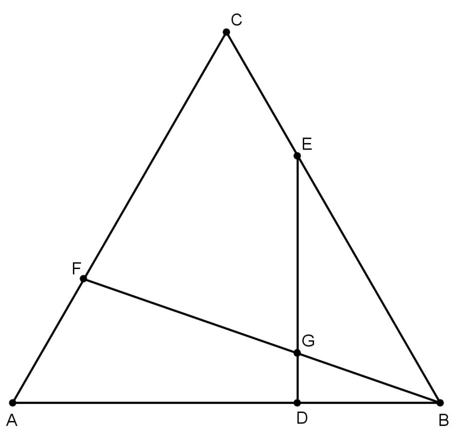

Figura 18

Exercício 16. O quadrado $ABCD$ está inscrito em um círculo cujo raio mede 30. A corda $\overline{AM}$ intercepta a diagonal $\overline{BD}$ no ponto P. Se o segmento $\overline{AM}$ mede 50, determine a medida do segmento $\overline{AP}$.

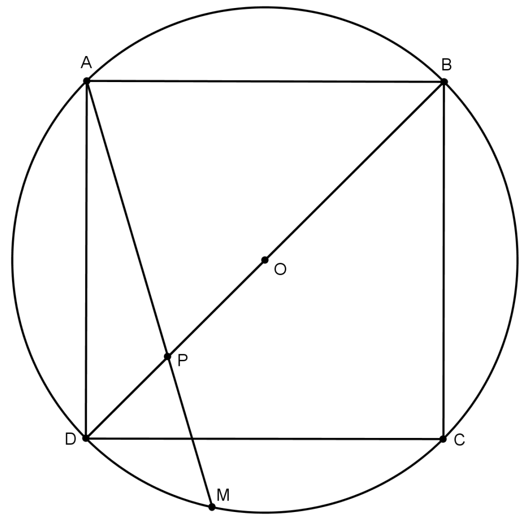

Figura 19

Respostas e Soluções.

1.

a) Sim, pois $\angle BAC \equiv \angle DAE$ e $\angle CBA = \angle EDA = 90^o$ (caso Ângulo-Ângulo).

b) Os lados homólogos são: $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$; $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$; e $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$.

2. Como $\angle KLM = \angle QPM = 53^o$ e $\angle KML \equiv \angle QMP$ (opostos pelo vértice), então $\triangle KLM \simeq \triangle MPQ$, pelo caso AA.

3. Como $\dfrac{20}{10} = \dfrac{14}{7} = \dfrac{12}{6} = 2$, a razão de semelhança é 2 ou $\dfrac{10}{20} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{6}{12} = 1/2$.

4. O triângulo formado por João e sua sombra e o triângulo formado pelo poste e sombra do mesmo são semelhantes. Usando a razão de semelhança, temos

$$\begin{aligned} \frac{1,6}{2} &= \frac{x}{7} \\ 2x &= 11,2 \\ x &= 5,6. \end{aligned}$$

Assim, a altura do poste é $5,6$m.

5. Como $MNPQ$ é um quadrado, então $\overline{PQ}//\overline{MN}//\overline{BC}$, o que implica que $\triangle ABC$ $\triangle APQ$. Chamando o lado do quadrado de x e aplicando a razão de semelhança, temos

$$\begin{aligned} \frac{12}{8} &= \frac{x}{8-x} \\ 8x &= 96 - 12x \\ x &= \frac{24}{5}. \end{aligned}$$

6. Traçando raios ligando os centros das circunferências aos pontos de tangências, obtemos a figura abaixo.

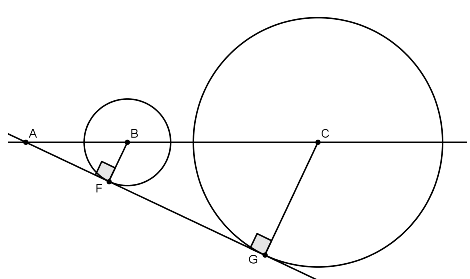

Figura 6

Perceba que $\triangle ABF$ $\triangle ACG$. Chamando a distância entre os centros de x e aplicando a razão de semelhança, temos

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} &= \frac{7+x}{5} \\ 21 + 3x &= 35 \\ x &= \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

7. (Extraído da Vídeo Aula) Como $\angle ECD \equiv \angle ACB$ e $\angle ABC = \angle EDC = 90^o$, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EDC$ são semelhantes. Aplicando a razão de semelhança, temos:

$$\begin{aligned} \frac{20}{15} &= \frac{15}{DE} \\ 20DE &= 225 \\ DE &= \frac{45}{4}. \end{aligned}$$

8. (Extraído da Vídeo Aula) Como os triângulos $\triangle CED$ e $\triangle DFB$ são semelhantes, pois $\angle CED = \angle DFB = 90^o$ e $\angle CDE \equiv \angle DBF$, vamos aplicar a razão de semelhança, chamando o lado do quadrado de x. Temos então

$$\begin{aligned} \frac{4-x}{x} &= \frac{x}{6-x} \\ x^2 &= 24 - 10x + x^2 \\ x &= \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Assim, temos que o perímetro do quadrado $AEDF$ é $\dfrac{48}{5}$.

9. (Extraído da Vídeo Aula)

Fazendo $EF = x$, $FB = y$, temos $FM = 10 - y$. Podemos observar a semelhança dos triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle FEB$, além dos triângulos $\triangle CBM$ e $\triangle EFM$. Aplicando a razão de semelhança em ambos os casos, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y}{20} = \dfrac{x}{12} \\ \dfrac{10-y}{10} = \dfrac{x}{12} \end{cases}$$

Simplificando, chegamos ao sistema equivalente

$$\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 5x + 6y = 60 \end{cases}$$

Segue que $EF = x = 4$.

10. (Extraído da Vídeo Aula) Nomeando alguns pontos importantes, obtemos a figura abaixo.

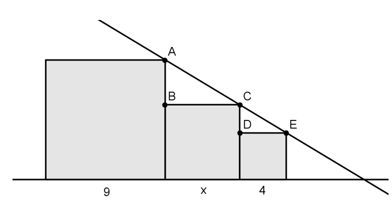

Figura 11

Como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CDE$ são semelhantes, vamos aplicar a razão de semelhança.

$$\begin{aligned}\frac{AB}{CD} &= \frac{BC}{DE}\\ \frac{9-x}{x-4} &= \frac{x}{4}\\ x^2-4x &= 36-4x\\ x^2 &= 36\\ x_1 = -6\\ x_2 = 6.\end{aligned}$$

Como trata-se de comprimento de segmento, temos, como solução, apenas $x = 6$.

11. (Extraído da Vídeo Aula) Traçando o diâmetro $\overline{AD}$ e, em seguida, $\overline{DC}$, obtemos a figura abaixo.

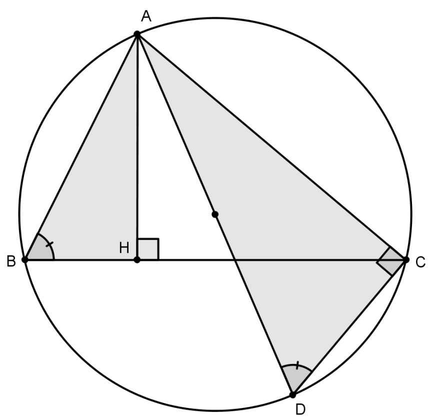

Figura 13

Como $\angle ABH \equiv \angle ABH$ e $\angle ADC$ são ângulos inscritos que "olham"para o mesmo arco, então eles são congruentes. Além disso, $\angle ACD = \angle AHB = 90^o$ e, portanto, $\triangle ACD\ \triangle AHB$. Aplicando a razão de semelhança e chamando a medida do raio de r, temos

$$\begin{aligned}\frac{AD}{AB} &= \frac{AC}{AH}\\ \frac{2r}{10} &= \frac{12}{4}\\ 8r &= 120\\ r &= 15.\end{aligned}$$

12. (Extraído da Vídeo Aula) Traçando um raio de M até o ponto de tangência entre $\overline{HB}$ e a semicircunferência e chamando-o de D, temos $\triangle ABH\ \triangle MBD$, segue que $AH = 2r$, sendo r a medida do raio, pois M é ponto médio e MD é base média. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $\triangle BHA$ e $\triangle ABH$, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} HB^2 + (10-2r)^2 = 10^2 \\ \\ HB^2 + (2r)^2 = 6^2 \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtemos $r = 9/10$cm.

13. (Extraído da Vídeo Aula) Traçando os segmentos BN e PK, sendo este perpendicular a $\overline{AD}$, temos os triângulos retângulos $\triangle ABN$ e $\triangle AKP$, que são semelhantes. Observe a figura.

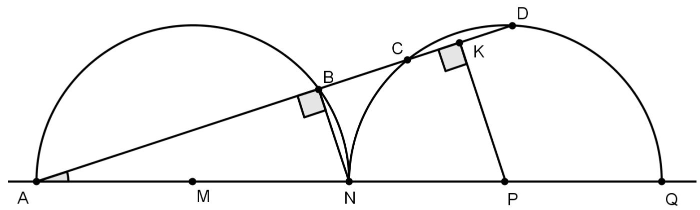

Figura 16

Fazendo $BC = CD = 2x$, temos $CK = KD = x$, pois K é ponto médio. Como $\triangle ABN\ \triangle AKP$, temos a seguinte razão de semelhança.

$$\begin{aligned}\frac{AP}{AN} &= \frac{AK}{AB}\\ \frac{3AM}{2AM} &= \frac{36-x}{36-4x}\\ 72-2x &= 108-12x\\ x &= 18/5.\end{aligned}$$

Concluímos que $CD = 36/5$.

14. (Extraído da Vídeo Aula)
Como $\overline{DE}//\overline{AC}$, então $\angle DEB = \angle ACB = 2\alpha$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, $\angle CDE = \alpha$ e, por consequência, $\overline{CE} \equiv \overline{DE}$, pois $\triangle CDE$ é isósceles. Como $\overline{DE}//\overline{AC}$, temos, pelo Teorema de Tales, que $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{CE}{EB}$ (1). Além disso, pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{BC}$ (2). Por (1) e (2), temos $DE = \dfrac{mn}{m+n}$.

15. (Extraído da OBM 2014)
Pelos pontos E e D, respectivamente, trace paralelas ao lado AC, determinando os pontos H e I sobre o segmento FB. Seja $AB = 3x$. Temos $\triangle EHB\ \triangle CFB$ e $\triangle IDB\ \triangle FAB$, daí: $\dfrac{HE}{2x} = \dfrac{HE}{FC} = \dfrac{EB}{BC} = \dfrac{2x}{3x}$ e $\dfrac{ID}{x} = \dfrac{ID}{FA} = \dfrac{DB}{AB} = \dfrac{x}{3x}$. Portanto, $HE = 4x/3$ e $ID = x/3$. Como $\triangle GID\ \triangle HGE$, segue que: $\dfrac{EG}{GD} = \dfrac{HE}{ID} = \dfrac{4x/3}{x/3} = 4$.

16. (Extraído da OBM 2013) Trace a diagonal $\overline{AC}$ que intersecta $\overline{DB}$ no ponto O. Sendo $ABCD$ um quadrado, O é o centro da circunferência. Observe que $\angle CMA = 90^o$ e $\angle POA = \angle DOA = 90^o$. Logo, pelo caso AA, os triângulos AOP e AMC são semelhantes e, portanto, $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AO}{AM}$, é equivalente a $\dfrac{AP}{60} = \dfrac{30}{50}$, ou seja, $AP = 36$.

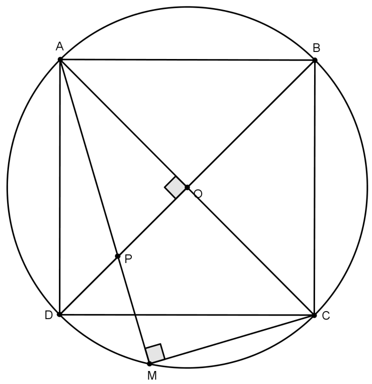

Figura 20

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com