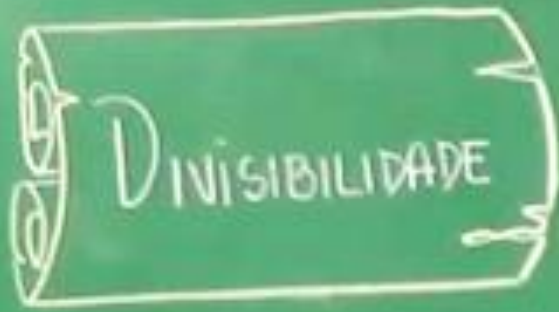


ALGORITMO DA DIVISÃO E ANÁLISE DOS RESTOS



SEJAM a E b NÚMEROS INTEIROS ($a \neq 0$) TEMOS QUE
"a DIVIDE b" SE, E SOMENTE SE, $b = a \cdot q$, PARA ALGUM $q \in \mathbb{Z}$

Ex.1 5 DIVIDE 15 $\Rightarrow 15 = 5 \cdot 3$

Ex.2 6 DIVIDE -18 $\Rightarrow -18 = 6 \cdot (-3)$

ALGORITMO DA DIVISÃO E ANÁLISE DOS RESTOS

NOTAÇÃO

a DIVIDE b $\Rightarrow a \mid b$

Ex. 3

$$3 \mid 12 \Rightarrow 12 = 3 \cdot 4$$

$$7 \mid -42 \Rightarrow -42 = 7 \cdot (-6)$$

$$8 \nmid 50 \Rightarrow 50 = 8 \cdot (?)$$

(?) \Rightarrow 8 NÃO DIVIDE 50

PROPRIEDADES $(a \neq 0)$

$$2 \mid 8 \text{ e } 8 \mid 24 \rightarrow 2 \mid 24$$

I) $a \mid 0$

DE FATO, POIS $0 = a \cdot 0$

II) $1 \mid a$

DE FATO, POIS $a = 1 \cdot a$

III) $a \mid a$

DE FATO, POIS $a = a \cdot 1$

IV) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, ENTÃO $a \mid c$.

$$b = a \cdot q_1$$

$$c = b \cdot q_2$$

$$+ c = b \cdot q_2 \rightarrow c = a \cdot q_1 q_2$$

RAUL BUENO

ALGORITMO DA DIVISÃO E ANÁLISE DOS RESTOS



II) SE $a|b$ E $a|c$, ENTÃO $a|(b+c)$

$$a|b \Rightarrow b = a \cdot q_1, q_1 \in \mathbb{Z}$$

$$a|c \Rightarrow c = a \cdot q_2, q_2 \in \mathbb{Z}$$

Ex.) $2|10$ E $2|16$

$$2|(10+16) \therefore 2|26$$

$$b+c = a \cdot q_1 + a \cdot q_2 = a \cdot (q_1 + q_2)$$

ALGORITMO DA DIVISÃO E ANÁLISE DOS RESTOS

DIVISÃO EUCLIDIANA

PARA QUAISQUER INTEIROS a E b COM $a \neq 0$, EXISTE UM ÚNICO PAR (q, r) DE INTEIROS TAIS QUE $b = a \cdot q + r$ ONDE $0 \leq r < |a|$. OS NÚMEROS q E r SÃO CHAMADOS, RESPECTIVAMENTE, DE QUOCIENTE E RESTO DA DIVISÃO DE b POR a .

UNIC
20
17
OBMEP

RAUL BUENO

ALGORITMO DA DIVISÃO E ANÁLISE DOS RESTOS

DIVIDENDO DIVISOR

$$\begin{array}{r|l} b & a \\ \hline r & q \end{array} \quad 0 \leq r < |a|$$

RESTO. QUOCIENTE

10 | 3
1 | 3

11 | 3
2 | 3

12 | 3
0 | 4

13 | 3
1 | 4

14 | 3
2 | 4

15 | 3
0 | 5

$r \in \{0, 1, 2\}$

NEGATIVO

$$\begin{aligned} -6 &= 2 \cdot (-3) \\ -7 &= 2 \cdot (-3) - 1 \\ &\downarrow \\ -7 &= 2 \cdot (-4) + 1 \\ &\quad \quad \quad -8 \end{aligned}$$

ALGORITMO DA DIVISÃO E ANÁLISE DOS RESTOS

Algoritmo da divisão euclidiana

$$a \in \mathbb{N}, a > 0$$

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots, a-1 \} \cup$$

$$\cup \{ a, a+1, a+2, \dots, 2a-1 \} \cup$$

$$\cup \{ 2a, 2a+1, 2a+2, \dots, 3a-1 \} \cup$$

...

$$\cup \{ qa, qa+1, qa+2, \dots, (q+1)a-1 \} \cup$$

...

ALGORITMO DA DIVISÃO E ANÁLISE DOS RESTOS

$$b \in \mathbb{Z}$$

$$b \in \{qa, qa+1, qa+2, \dots, (q+1)a-1\}$$

$$qa \leq b \leq (q+1)a-1$$

$$qa \leq b \leq qa+a-1$$

$$qa \leq qa+r \leq qa+a-1$$

$$0 \leq r \leq a-1$$

$$b = qa + r$$

$$0 \leq r \leq a-1$$

ALGORITMO DA DIVISÃO E ANÁLISE DOS RESTOS

$$a, b \in \mathbb{N}$$
$$a > 0$$

$\exists (q, r)$ tal que

$$b = aq + r \text{ e } 0 \leq r < a - 1$$

$$b = aq' + r' \text{ e } 0 \leq r' < a - 1$$

$$0 = a(q - q') + (r - r')$$

$$a(q' - q) = r - r' \begin{cases} \text{máximo} = a - 1 \\ \text{mínimo} = 1 - a \end{cases}$$

$$\rightarrow r - r' \in \{1 - a, \dots, 0, \dots, a - 1\}$$

$$\downarrow$$
$$r - r' = 0 \rightarrow \boxed{r' = r}$$

$$\downarrow (a \neq 0)$$
$$q' - q = 0 \rightarrow \boxed{q' = q}$$

ALGORITMO DA DIVISÃO E ANÁLISE DOS RESTOS

Algoritmo da divisão euclideana

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ ($a \neq 0$),

existe um par (q, r) tal que

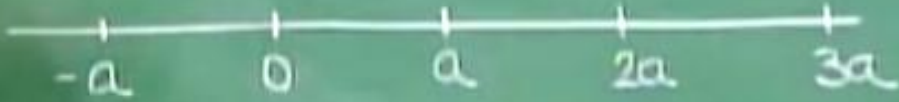
$$b = aq + r \quad \text{com } 0 \leq r < |a|$$

e esse par é único.

RAUL BUENO

ALGORITMO DA DIVISÃO E ANÁLISE DOS RESTOS

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} = & \dots \\ & \cup \{-2a, -2a+1, \dots, -a-1\} \cup \\ & \cup \{-a, -a+1, \dots, -1\} \cup \\ & \cup \{0, 1, \dots, a-1\} \cup \\ & \cup \{a, a+1, \dots, 2a-1\} \cup \\ & \cup \{2a, 2a+1, \dots, 3a-1\} \cup \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22 &= 4 \cdot 6 + (-2) \\ 22 &= 4 \cdot 5 + 2 \\ 22 &= 4 \cdot 4 + 6 \\ 22 &= 4 \cdot 3 + 10 \end{aligned}$$


A number line diagram with tick marks at $-a$, 0 , a , $2a$, and $3a$. The line is drawn above these points, and the points are labeled below the line.

RAUL BUENO

ALGORITMO DA DIVISÃO E ANÁLISE DOS RESTOS

Encontre o resto da divisão de $1991 + 1992$ por 7.

Encontre o resto da divisão de $1991 \cdot 1992$ por 7.

Encontre o resto da divisão de 1991^3 por 7.

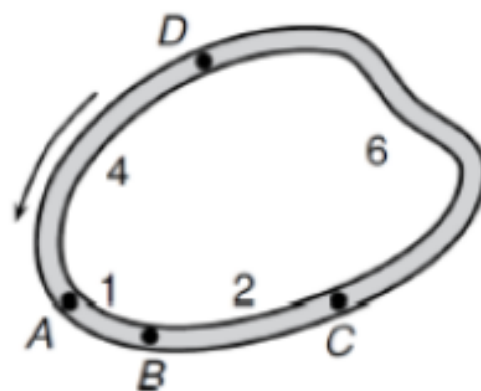
Encontre o resto da divisão de $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^3$ por 7.

HORA DE TRABALHAR! 😊

RESOLVAM AS QUESTÕES SOLICITADAS...

(I) Exercício 4, página 29, da apostila da Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, F. Dutenhfner e L. Cadar.

A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

- Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
- E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são estes postos?
- Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

(II) Problema 3.33 que encontra-se na página 62 da Apostila 1 da OBMEP, “Iniciação à Aritmética”, A. Hehez.

Determine o resto da divisão por 3 do número $4^{100}+32^{30}$.

(IV) Problema proposto no vídeo “Algoritmo da Divisão Euclidiana”, que encontra-se no [Portal da Matemática](#).

Formalize matematicamente o Algoritmo da Divisão Euclidiana.

RAUL BUENO

Problema 3.18. Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:

- (a) de 43 por 3 (b) de 43 por 5 (c) de 233 por 4
(d) de 1 453 por 10, por 100, por 1 000 e por 10 000.

Problema 3.20. Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:

- (a) de -43 por 3 (b) de -43 por 5 (c) de -233 por 4
(d) de $-1 453$ por 10, por 100, por 1 000 e por 10 000.

Problema 3.26.

- (a) Mostre que a soma de três inteiros consecutivos é sempre múltiplo de 3.
(b) Dados três inteiros consecutivos, mostre que um deles é múltiplo de 3 e a soma dos outros dois também.

Problema 3.28. Mostre que o dobro de um número ímpar é par mas nunca múltiplo de 4.

Problema 3.31. Dado um número inteiro a e dados dois números naturais n e m , não nulos, mostre que são sempre pares os números $a^n + a^m$ e $a^n - a^m$.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

×	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Problema 3.33. Usando as tabelas acima, ache o resto da divisão por 3 do número $4^{100} + 32^{30}$.

Exercício 5: Na divisão de dois números inteiros, o quociente é 16 e o resto é o maior possível. Se a soma do dividendo e do divisor é 125, determine o resto.

Exercício 23: Calcule o resto da divisão de 2011 por 7. Em seguida calcule o resto da divisão de $2011 + 2012 + 2013 + 2014 + 2015$ por 7. Qual é o resto da divisão de $2011 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot 2014 \cdot 2015$ por 7?

Exercício 24:

1. Se o resto da divisão de a por 7 é igual a 3, então qual é o resto da divisão de $5a$ por 7?
2. Se a deixa resto 6 quando dividido por 8 e se b deixa resto 5 quando dividido por 8, qual é o resto da divisão de $a + b$ e de $a - b$ por 8?

Exercício 30: Sabendo-se que o número

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 14$$

é divisível por 13, qual é o resto da divisão do número

$$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

por 169?

Exercício 31: Se a e b são números naturais e $2a + b$ é divisível por 13, então qual dos seguintes números é um múltiplo de 13?

