Roteiro de Estudos – OBMEP NA ESCOLA
Grupo N3 – Ciclo 6

1. Introdução

Com mais de 10 anos de tradição, a OBMEP é muito mais do que a aplicação de uma prova e a entrega de medalhas e menções honrosas para alguns estudantes. Hoje a OBMEP é um programa nacional com ações diversificadas que têm contribuído para a melhoria da qualidade do ensino de matemática no país da 6ª série do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio.

Para aumentar ainda mais o impacto da OBMEP na melhoria da qualidade do ensino da matemática no país, o desafio consiste em envolver cada vez mais as escolas, as secretarias de ensino, os professores e os alunos nas ações propostas pela OBMEP ao longo de todo o ano escolar e na ampliação da utilização dos materiais didáticos elaborados pela OBMEP: provas anteriores, bancos de questões, apostilas, livros, plataformas virtuais, etc.

Desde a sua primeira edição, muitos desses materiais são enviados para as escolas e também são disponibilizados na internet. A partir de 2014, através do Programa OBMEP na Escola, esta sendo oferecida uma formação de professores que utiliza esses próprios materiais e promove encontros para os professores estudarem matemática, trocarem experiências e tirarem suas dúvidas para se sentirem mais seguros e preparados para utilizarem os materiais da OBMEP e trabalharem com a metodologia do ensino de matemática através da resolução de problemas.

A formação que o professor recebe e o aprendizado que ele adquire participando do Programa OBMEP na Escola são uteis e trarão consequências positivas para todos os alunos de todas as salas de aula que esse professor trabalhar. Entretanto, a aplicação do programa, em horário diferenciado, na sua turma de 20 alunos convidados terá um impacto bem maior e o aprendizado desses alunos e do professor será muito mais intenso.

Através do Programa OBMEP na Escola, da utilização cada vez maior dos materiais e dos recursos didáticos da OBMEP, da formação dos professores e da ampliação da divulgação da OBMEP nas escolas, entre outros resultados, deseja-se que:

- O número de alunos participantes da primeira fase da OBMEP aumente;
- Também aumente a qualidade da participação dos alunos na primeira fase, com o aumento das notas obtidas pelos alunos;
- As escolas divulguem e, de algum modo, valorizem os alunos que foram aprovados para a segunda fase;
- As escolas promovam ações metodológicas, em colaboração com os Professores Habilitados, para garantirem um bom desempenho dos alunos classificados para a segunda fase da OBMEP;

- A escola incentive fortemente e promova ações para garantir que todos os alunos classificados façam a prova da segunda fase da OBMEP, diminuindo drasticamente a evasão nesta prova;
- As escolas realizem cerimônias regionais de premiação dos alunos que receberam medalhas ou menção honrosa;

2. Planejamento Acadêmico

Em 2017, o Planejamento Acadêmico do Programa OBMEP na Escola prevê a realização de 7 ciclos de estudos com duração de quatro semanas cada um. A organização de cada ciclo é a seguinte:

- **1ª semana**: encontro de formação entre os coordenadores e os professores da Educação Básica que atuam no Programa OBMEP na Escola.
- **2ª semana**: (encontro 1) aula presencial de quatro horas ministrada por cada professor para a sua turma de alunos convidados.
- **3ª semana**: Período destinado para estudo dos alunos e preparação dos professores.
- **4ª semana**: (encontro 2) aula presencial de quatro horas ministrada por cada professor para a sua turma de alunos convidados.

Na primeira semana de cada ciclo, organizado pelos Coordenadores, é realizado o encontro de formação dos Professores da Educação Básica. Fortemente recomendado para ser presencial, este encontro é uma oportunidade para um estudo dos conteúdos matemáticos propostos no ciclo, através da leitura e da análise do que está proposto para ser executado nos encontros com os alunos. Também devem ser abordadas nesse encontro as listas de exercícios que serão utilizadas pelos professores nas aulas para os alunos convidados nos encontros 1 e 2, realizados na segunda e na quarta semana do ciclo.

O encontro entre professores e coordenadores não deve ser utilizado unicamente para discussões de assuntos administrativos. Mais do que isso, este é um encontro para estudo de matemática, dos materiais disponibilizados pela OBMEP, das listas de exercícios, das apostilas, das videoaulas, etc. Espera-se que após este encontro de formação, cada professor da escola básica se sinta mais seguro e preparado para ministrar as aulas para a sua turma de alunos convidados e, mais ainda, se sinta confortável para utilizar os materiais da OBMEP nas suas aulas regulares.

1ª semana: encontro de formação (Coordenadores e alunos de licenciatura)

No que segue vamos detalhar os conteúdos das duas aulas (encontro 1 e encontro 2) deste ciclo que devem ser ministradas para os alunos convidados, indicando referências bibliográficas e videoaulas relacionadas.

- Assuntos a serem abordados:

Os textos e vídeoaulas que o coordenador deve abordar com os professores e que eles deverão estudar para se preparem para as aulas com seus alunos são:

Álgebra: Fatoração de expressões algébricas, identidades algébricas notáveis, equações e inequações lineares, sistemas de duas equações lineares em duas variáveis.

Funções: Coordenadas no plano, conceito de função e seu gráfico, proporcionalidade e porcentagem, função afim e seu gráfico.

- Material a ser estudado pelo professor:

Os textos e videoaulas que o coordenador deve abordar com os professores e que eles deverão estudar para se preparem para as aulas com seus alunos são:

Álgebra

- Textos:

1. Material Teórico do Portal da Matemática, "Fatoração de Expressões Algébricas" – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/d8j2qoh4umg4c.pdf

2. Material Teórico do Portal da Matemática, "Produtos Notáveis" – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5hn3yxxx6ckk4.pdf

3. Material sobre equações e inequações lineares, seções 2.1, 2.4 e 2.8, Prof. Francisco de Assis Magalhães Gomes.
http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo2.pdf

4. Material Teórico do Portal da Matemática, "Sistemas de Equações do 1º Grau" – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor) e Material Teórico do Portal da Matemática, "Sistemas de Equações do Primeiro Grau com Duas Incógnitas" – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor)
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/ddxv6wgo91k40.pdf
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/csjbjkmptgggk.pdf

- Videoaulas do Portal da Matemática:

1. No Módulo "Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas" (http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=14), assistir as videoaulas:

- Produtos Notáveis – Parte 1;
- Produtos Notáveis – Parte 2;
- Produtos Notáveis – Parte 3;
- Produtos Notáveis – Parte 4;
- Produtos Notáveis – Parte 5;
- Resolução de Exercícios: Produtos Notáveis – Parte 1;
- Resolução de Exercícios: Produtos Notáveis – Parte 2;
- Resolução de Exercícios: Produtos Notáveis – Parte 3;
- Resolução de Exercícios: Produtos Notáveis – Parte 4;
- Resolução de Exercícios: Produtos Notáveis – Parte 5;
- Resolução de Exercícios: OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática);
- Fatoração de Expressões Algébricas – Parte 1;
- Fatoração de Expressões Algébricas – Parte 2;
- Fatoração de Expressões Algébricas – Parte 3.

2. No Módulo "Equações e Inequações do Primeiro Grau" (http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=44), assistir as videoaulas:

- Equações;
- Resolução de Equações 1;
- Resolução de Equações 2;
- Exercícios sobre Equações 1;
- Exercícios sobre Equações 2;
- Exercícios sobre Equações 3;
- Exercícios sobre Equações 4;
- Exercícios sobre Equações 5;
- Exercícios sobre Equações 6;
- Conceito de Inequação;
- Inequações Equivalentes;
- Exercícios de Inequações 1;
- Exercícios de Inequações 2;
- Exercícios de Inequações 3.

3. No Módulo “O Plano Cartesiano e Sistemas de Equações” (http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=49), assistir as videoaulas:

- Equação do Primeiro Grau com duas Incógnitas;
- Resolução de Sistemas de Equações do Primeiro Grau com duas Variáveis;
- Métodos da Adição e Substituição;
- Exercícios de Sistemas de Equações 1;
- Exercícios de Sistemas de Equações 2;
- Exercícios de Sistemas de Equações 3;
- Discussão de Sistemas de Equações.

Funções

- Textos:

1. Material Teórico do Portal da Matemática, “O Plano Cartesiano” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor).
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/u49fw5fm9u0.pdf

2. Material Teórico do Portal da Matemática, “Funções - Noções Básicas - Parte 1” – A. P. Neto, A. C. M. Neto (revisor) e Material Teórico do Portal da Matemática, “Funções - Noções Básicas - Parte 2” – A. P. Neto, A. C. M. Neto (revisor).
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/da1wp3y2r604k.pdf
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8f05gs9zxg08w.pdf

3. Material Teórico do Portal da Matemática, “A Noção de Razão e Exercícios” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, “Proporção e Conceitos Relacionados” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, “Propriedades de Proporções” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, “Números Diretamente e Inversamente Proporcionais” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor) e Material Teórico do Portal da Matemática, “Porcentagem” – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bzl4vx6dr7s4c.pdf
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfi4cykgi4g0g.pdf
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmw0n6cgks.pdf
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/cfea7ykbmvscc.pdf

4. Material Teórico do Portal da Matemática, “Funções Afins - Noções Básicas” – A. P. Neto, A. C. M. Neto (revisor).
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/brc70d5silssg.pdf

- Videoaulas do Portal da Matemática:

1. No Módulo "O Plano Cartesiano e Sistemas de Equações" (http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=49), assistir as videoaulas:

- Plano Cartesiano;
- Plano Cartesiano 2.

2. No Módulo "Funções - Noções Básicas" (http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=34), assistir as videoaulas:

- Função Real de Variável Real, Plano Cartesiano e Gráfico;
- Funções: Conceitos Básicos.

3. No Módulo "Razões e Proporções" (http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=57), assistir as videoaulas:

- Razões;
- Exercícios sobre Razões 1;
- Exercícios sobre Razões 2;
- Exercícios sobre Razões 3;
- Proporções;
- Proporções 2;
- Propriedades das Proporções 1;
- Propriedades das Proporções 2;
- Propriedades das Proporções 3;
- Números Diretamente Proporcionais;
- Números Inversamente Proporcionais.

4. No Módulo "Função Afim" (http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=35), assistir as videoaulas:

- Função Afim: Definição e Propriedades Básicas;
- Gráfico da Função Afim;
- Função Afim: Caracterização;
- Função Afim: Resolução de Exercícios – Parte 1;
- Função Afim: Resolução de Exercícios – Parte 2;
- Função Afim: Resolução de Exercícios – Parte 3;
- Função Afim: Resolução de Exercícios – Parte 4.

ENCONTRO 1
2ª semana: aula para alunos convidados

- Assuntos a serem abordados:

Álgebra: Fatoração de expressões algébricas, identidades algébricas notáveis, equações e inequações lineares, sistemas de duas equações lineares em duas variáveis.

- Textos para consulta:

1. Material Teórico do Portal da Matemática, "Fatoração de Expressões Algébricas" – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/d8j2qoh4umg4c.pdf

2. Material Teórico do Portal da Matemática, "Produtos Notáveis" – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5hn3yxxx6ckk4.pdf

3. Material sobre equações e inequações lineares, seções 2.1, 2.4 e 2.8, Prof. Francisco de Assis Magalhães Gomes.
http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo2.pdf

4. Material Teórico do Portal da Matemática, "Sistemas de Equações do 1º Grau" – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor) e Material Teórico do Portal da Matemática, "Sistemas de Equações do Primeiro Grau com Duas Incógnitas" – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor)
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/ddxv6wgo91k40.pdf
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/csjbjkmptgggk.pdf

- Exercícios a serem discutidos com os alunos: está disponibilizada uma lista de oito exercícios. O professor deverá propor os exercícios da lista para que os alunos resolvam. Acompanhando, individual ou coletivamente, a tentativa de resolução dos exercícios pelos alunos, o professor poderá perceber o nível de compreensão dos temas abordados. Para cada exercício da lista, sugere-se que pelo menos um dos alunos que o tenham resolvido apresente sua resolução para os demais alunos, e o professor acompanhe a resolução, corrigindo, destacando e aprofundando os conhecimentos matemáticos abordados. A ideia é que os temas abordados sejam assimilados pelos alunos durante a resolução dos exercícios, ou seja, a resolução dos exercícios deve provocar a necessidade de aprofundar os temas abordados. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados.

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo da aula com os alunos convidados. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

Exercício 1. O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ $3{,}50$ e cada quilômetro rodado custa R$ $0{,}50$, determine que distância pode-se percorrer com um valor entre R$ $20{,}00$ e R$ $30{,}00$.

Exercício 2. Em um teste de 25 questões, cada acerto vale 4 pontos e cada erro vale -1 ponto. Daniel respondeu todas as questões e marcou 65 pontos. Quantas questões ele acertou?

Exercício 3. Em um complexo de salas de cinema, há um dia da semana em que os ingressos têm preços reduzidos de modo que o preço da meia entrada é igual a R$ $7{,}50$ e o preço da inteira é igual a R$ $15{,}00$. Sabendo que, em uma determinada sessão desse dia, foram ocupados 240 lugares e foram arrecadados R$ $2370{,}00$, qual é o número de espectadores de cada categoria de ingresso?

Exercício 4. O que é maior, 333333×444444 ou 222222×666667? Qual é a diferença entre eles?
(*Dica*: primeiro, compare os números 333333×444444 e 222222×666666)

Exercício 5. Quais são os valores de x que satisfazem $\frac{1}{x-2} \leq 4$?

Exercício 6. Encontre os valores positivos de x que satisfazem

$$(x-1)(x-2)(x-3) < 0.$$

(*Banco de Questões 2006, nível 3, lista 9, questão 1*)

Exercício 7. Seja n inteiro positivo e considere

$$f(n) = \frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}.$$

Calcule o valor de $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(40)$.
(*Banco de Questões 2011, nível 3, questão 83*)

Exercício 8. A diferença de idade entre dois irmãos é de três anos. Um ano atrás, a idade do pai desses irmãos era o dobro da soma das idades dos irmãos e, dentro, de vinte anos, a idade do pai será a soma das idades desses dois irmãos. Qual é a idade de cada um dos irmãos?
(*Banco de Questões 2010, nível 3, questão 199*)

Solução do Exercício 1. Seja x a distância percorrida pelo táxi, em quilômetros. Como se paga R\$ 3,50 para entrar no carro e mais R\$ 0,50 por quilômetro, o custo da corrida é dado por $3{,}50 + 0{,}50x$. Como foi estabelecido o limite mínimo de R\$ $20{,}00$ e o limite máximo de R\$ $30{,}00$ para o valor a ser gasto, então $20 \leq 3{,}5 + 0{,}5x \leq 30 \Leftrightarrow 20 - 3{,}5 \leq 0{,}5x \leq 30 - 3{,}5 \Leftrightarrow 16{,}5 \leq 0{,}5x \leq 26{,}5 \Leftrightarrow \frac{16{,}5}{0{,}5} \leq x \leq \frac{26{,}5}{0{,}5} \Leftrightarrow 33 \leq x \leq 53$.
Portanto, o táxi poderá percorrer uma distância que entre 33 km e 53 km.

Solução do Exercício 2. Seja x o número de acertos. Então, houve $25 - x$ erros. O número de pontos foi $4x - (25 - x) = 65$. Logo, $x = 18$.

Solução do Exercício 3. Sejam x o número de espectadores que pagou meia e y o número de espectadores que pagou inteira. Então, $x + y = 240$ e $15x + 7{,}5y = 2370$. Resolvendo o sistema formado por essas duas equações, obtém-se $x = 76$ e $y = 164$.

Solução do Exercício 4. Tem-se $333333 \times 444444 = 3 \times 111111 \times 4 \times 111111 = 12 \times 111111 \times 111111 = 2 \times 111111 \times 6 \times 111111 = 222222 \times 666666$. Agora, $222222 \times 666667 = 222222 \times (666666 + 1) = 222222 \times 666666 + 222222 = 333333 \times 444444 + 222222$. Assim, 222222×666667 é maior do que 333333×444444 e a diferença é igual a 222222.

Solução do Exercício 5. Temos $\frac{1}{x-2} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{9-4x}{x-2} \leq 0$. Assim, $9 - 4x$ e $x - 2$ devem ter sinais contrários, sendo que $x - 2$ deve ser diferente de zero por ser o denominador da fração. Assim, temos dois casos:

1º caso: $9 - 4x \geq 0$ e $x - 2 < 0$.
Neste caso, temos $9 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{9}{4}$ e $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$. Como $2 < \frac{9}{4}$, para se ter $x \leq \frac{9}{4}$ e $x < 2$, deve-se ter $x < 2$.

2º caso: $9 - 4x \leq 0$ e $x - 2 > 0$.
Neste caso, temos $9 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{4}$ e $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Como $2 < \frac{9}{4}$, para se ter $x \geq \frac{9}{4}$ e $x > 2$, deve-se ter $x \geq \frac{9}{4}$.

Assim, a solução da inequação $\frac{1}{x-2} \leq 4$ é $x < 2$ ou $x \geq \frac{9}{4}$.

Solução do Exercício 6. Para que um produto de três fatores seja negativo, devemos ter dois fatores positivos e um fator negativo, ou os três negativos. Assim, as possibilidades para $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$ são:

I) $\underbrace{(x-1)}_{+}\ \underbrace{(x-2)}_{+}\ \underbrace{(x-3)}_{-}$, ou seja, $x > 1,\ x > 2$ e $x < 3$.

Nesse caso, a solução é $2 < x < 3$.

II) $\underbrace{(x-1)}_{+}\ \underbrace{(x-2)}_{-}\ \underbrace{(x-3)}_{+}$, ou seja, $x > 1,\ x < 2$ e $x > 3$, o que não possível. Logo, esse caso não pode ocorrer.

III) $\underbrace{(x-1)}_{-}\ \underbrace{(x-2)}_{+}\ \underbrace{(x-3)}_{+}$, ou seja, $x < 1,\ x > 2$ e $x > 3$, o que não é possível. Logo, esse caso não pode ocorrer.

IV) $\underbrace{(x-1)}_{-}\ \underbrace{(x-2)}_{-}\ \underbrace{(x-3)}_{-}$, ou seja, $x < 1,\ x < 2$ e $x < 3$.

Nesse caso, a solução é $x < 1$.

Logo, a solução é composta de todos os números reais x tais que $x < 1$ ou $2 < x < 3$.

Solução do Exercício 7. Seja $a = \sqrt{2n+1}$ e $b = \sqrt{2n-1}$. Então, $ab = \sqrt{4n^2-1}$, $a^2 + b^2 = 4n$ e $a^2 - b^2 = 2$. Assim, $f(n) = \frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} = \frac{a^2+b^2+ab}{a+b}$. Como $a - b \neq 0$, podemos escrever:

$$f(n) = \frac{a^2+b^2+ab}{a+b} \cdot \frac{a-b}{a-b} = \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \frac{(\sqrt{2n+1})^3 - (\sqrt{2n-1})^3}{2}.$$

Assim, $f(1) + f(2) + \cdots + f(40) = \frac{(\sqrt{3})^3-(\sqrt{1})^3}{2} + \frac{(\sqrt{5})^3-(\sqrt{3})^3}{2} + \cdots + \frac{(\sqrt{81})^3-(\sqrt{79})^3}{2} =$ $= \frac{(\sqrt{81})^3-(\sqrt{1})^3}{2} = \frac{729-1}{2} = 364$.

Solução do Exercício 8. Sejam x a idade do irmão mais velho e y a idade do pai. Então, a idade do irmão mais novo é $x-3$. Temos $y - 1 = 2[(x-1) + (x-3-1)]$ e $y + 20 = (x+20) + (x-3+20)$. Obtemos assim o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 4x - y = 9 \\ 2x - y = -17 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtém-se $x = 13$ e $y = 43$. Assim, a idade dos irmãos são 13 anos e $13 - 3 = 10$ anos.

ENCONTRO 2
4ª semana: aula para alunos convidados

- Assuntos a serem abordados:

Funções: Coordenadas no plano, conceito de função e seu gráfico, proporcionalidade e porcentagem, função afim e seu gráfico.

- Textos para consulta:

1. Material Teórico do Portal da Matemática, "O Plano Cartesiano" – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor).
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/u49fw5fm9u0.pdf

2. Material Teórico do Portal da Matemática, "Funções - Noções Básicas - Parte 1" – A. P. Neto, A. C. M. Neto (revisor) e Material Teórico do Portal da Matemática, "Funções - Noções Básicas - Parte 2" – A. P. Neto, A. C. M. Neto (revisor).
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/da1wp3y2r604k.pdf
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8f05gs9zxg08w.pdf

3. Material Teórico do Portal da Matemática, "A Noção de Razão e Exercícios" – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, "Proporção e Conceitos Relacionados" – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, "Propriedades de Proporções" – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, "Números Diretamente e Inversamente Proporcionais" – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, "Porcentagem" – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bzl4vx6dr7s4c.pdf
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfi4cykgi4g0g.pdf
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmw0n6cgks.pdf
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/cfea7ykbmvscc.pdf

4. Material Teórico do Portal da Matemática, "Funções Afins - Noções Básicas" – A. P. Neto, A. C. M. Neto (revisor).
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/brc70d5silssg.pdf

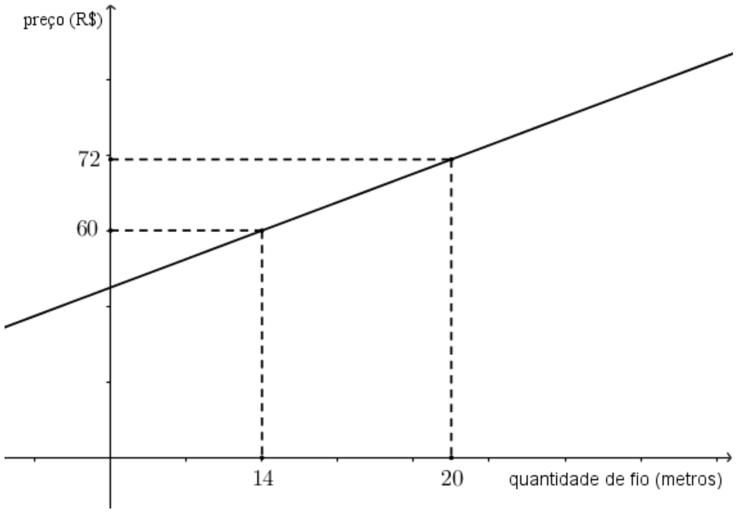
- Exercícios a serem discutidos com os alunos: está disponibilizada uma lista de oito exercícios. O professor deverá propor os exercícios da lista para que os alunos resolvam. Acompanhando, individual ou coletivamente, a tentativa de resolução dos exercícios pelos alunos, o professor poderá perceber o nível de compreensão dos temas abordados. Para cada exercício da lista, sugere-se que pelo menos um dos alunos que o tenham resolvido apresente sua resolução para os demais alunos, e o professor acompanhe a resolução, corrigindo, destacando e aprofundando os conhecimentos matemáticos abordados. A ideia é que os temas abordados sejam assimilados pelos alunos durante a resolução dos exercícios, ou seja, a resolução dos exercícios deve provocar a necessidade de aprofundar os temas abordados. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados.

Exercício 1. Usando 9 caminhões basculantes por 12 horas diárias, uma empresa costuma transportar 216 toneladas de terra por dia para a construção de uma enorme barragem. Como a empreiteira que administra a obra está interessada em acelerar o trabalho, a empresa terá que passar a transportar 272 toneladas diárias. Por outro lado, em virtude de um acordo com o sindicato dos motoristas, a empresa deverá operar os caminhões por 8 horas por dia. Diariamente, quantos caminhões devem ser usados para transportar terra à barragem?

Exercício 2. Dois caminhões-tanque carregam o mesmo volume de misturas de álcool e gasolina. A mistura de contém 3% de álcool, e a do outro, 5% de álcool. Os dois caminhões descarregam suas cargas em um reservatório que estava vazio. Qual é a razão do volume de álcool para o de gasolina na mistura formada no reservatório, após os caminhões terem descarregado?

Exercício 3. De modo geral, a lei que rege as transações comerciais é $V = L + C$, onde V é o preço de venda do produto, C é o custo do produto e L é o lucro obtido na transação. Para produzir um objeto, uma firma tem o custo de R\$ $1{,}20$ por unidade. Além disso, há um custo fixo de R\$ $4000{,}00$, independente da quantidade produzida. O preço de venda é de R\$ $2{,}00$ por unidade. Admitindo que todas as unidades produzidas são vendidas, qual é o número mínimo de unidades que devem ser produzidas partir do qual a firma começa a ter lucro?

Exercício 4. O valor total cobrado por um eletricista A inclui uma parte fixa, como visita, transporte, etc., e outra que depende da quantidade de metros de fio requerida pelo serviço. O gráfico abaixo representa o valor do serviço efetuado em função da quantidade de fio utilizada, em metros.



a) Qual é o valor da parte fixa cobrado pelo eletricista A?
b) O preço cobrado por um eletricista B depende unicamente do número de metros de fio utilizado, não sendo cobrada a parte fixa. Se o preço do serviço é de R$ 4,50 por metro de fio utilizado, a partir de quantos metros deve o consumidor preferir o eletricista A ao eletricista B?

Exercício 5. Uma piscina vazia foi abastecida de água por duas torneiras A e B, ambas com vazão constante. Durante 4 horas, as duas torneiras ficaram abertas e encheram 50% da piscina. Em seguida, a torneira B foi fechada e durante 2 horas a torneira A encheu 15% do volume da piscina. Após este período a torneira A foi fechada e a torneira B aberta. Durante quanto tempo esta torneira teve de ficar aberta para que ela sozinha terminasse de encher a piscina?
(*Banco de Questões 2009, nível 3, lista 4, questão 1*)

Exercício 6. Se 15% dos membros de uma população foram afetados por uma doença e 8% dos afetados morreram, qual é a porcentagem da mortalidade em relação à população inteira?
(*Banco de Questões 2010, nível 3, questão 94*)

Exercício 7. Um carro é denominado *flex* se ele pode ser abastecido com gasolina ou com álcool. Considere que os preços do álcool e da gasolina sejam, respectivamente, R$ 1,59 e R$ 2,49 por litro.

a) Suponha que um carro flex rode 12,3 km por litro de gasolina, que indicamos 12,3 km/l. Qual deve ser a relação km/l desse carro, para o álcool, para que a utilização do álcool seja financeiramente mais vantajosa que a de gasolina?

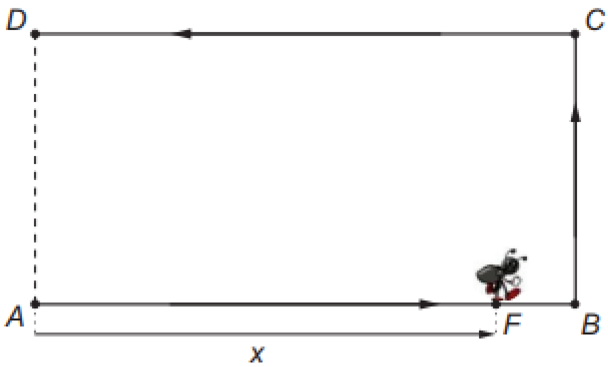
b) Se o desempenho de um carro flex é de x km/l com gasolina e de $\left(\frac{x}{2}+1\right)$ km/l com álcool, escreva a expressão da função $g(x)$ que fornece o custo desse carro rodar 100 km utilizando gasolina e a expressão da função $a(x)$ que fornece o custo desse carro rodar 100 km utilizando álcool.

c) Para que o custo seja o mesmo, tanto com álcool como com gasolina, qual deve ser a relação km/l para a gasolina e para o álcool?

d) Em que condição o uso do álcool é mais vantajoso, financeiramente, que o da gasolina? Dê um exemplo numérico que satisfaça a condição.

(*Banco de Questões 2009, nível 3, lista 3, questão 1*)

Exercício 8. Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo $ABCD$. Ela parte do ponto A, anda 20 cm até chegar em B, depois anda mais 10 cm até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Após andar x centímetros, a formiga está em um ponto F do contorno.



a) Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D?

b) Calcule a área do triângulo ADF quando $x = 22$ cm.

c) Qual é a maior área possível para um triângulo ADF?

d) Esboce, no plano cartesiano Oxy, o gráfico da função que associa ao comprimento x o valor da área do triângulo ADF.

(*Prova da 2ª Fase da OBMEP, 2014, questão 2*)

Solução do Exercício 1. Sejam C o número de caminhões, T a quantidade de terra e H o número de horas diárias. Então, C é diretamente proporcional a T e inversamente proporcional a H. Assim, $C = k \cdot \frac{T}{H}$, sendo k uma constante de proporcionalidade. Para $T = 216$ e $H = 12$, tem-se $C = 9$. Logo, $9 = k \cdot \frac{216}{12}$, donde $k = \frac{1}{2}$. Assim, $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{H}$. Para $T = 272$ e $H = 8$, tem-se $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{272}{8} = 17$.

Solução do Exercício 2. Se V litros é o volume de cada caminhão, então, inicialmente, um caminho contém $\frac{3V}{100}$ litros de álcool e o outro contém $\frac{5V}{100}$ litros de álcool. Após os caminhões descarregarem, a nova mistura ocupa o volume $2V$ litros, contendo $\frac{3V}{100} + \frac{5V}{100} = \frac{8V}{100} = \frac{2V}{25}$ litros de álcool e $2V - \frac{2V}{25} = \frac{48V}{25}$ litros de gasolina. Assim, a razão do volume de álcool para o de gasolina na mistura formada no reservatório é igual a $\frac{2V/25}{48V/25} = \frac{1}{24}$.

Solução do Exercício 3. Seja x o número de unidades produzidas. O custo de produção das x unidades é dado pela função afim $C(x) = 4000 + 1{,}2x$ e o total arrecadado com a venda das x unidades é dado pela função afim $V(x) = 2x$. A firma tem lucro com a venda das x unidades quando $V(x) > C(x)$, isto é, $2x > 4000 + 1{,}2x$, isto é, $x > 5000$.

Solução do Exercício 4.

a) Como o gráfico na figura é uma reta, então o preço cobrado pelo eletricista A é dado por uma função afim $f(x) = ax + b$, sendo x a quantidade de fio em metros. Do gráfico, tem-se $60 = f(14) = 14a + b$ e $72 = f(20) = 20a + b$, ou seja, $14a + b = 60$ e $20a + b = 72$. Resolvendo o sistema formado por essas duas últimas equações, obtém-se $a = 2$ e $b = 32$. Assim, $f(x) = 2x + 32$. O valor da parte fixa é $f(0) = 32$ reais.

b) Como o eletricista B não cobra a parte fixa, então o preço cobrado por ele é dado pela função afim $g(x) = 4{,}5x$. O consumidor deve preferir o eletricista A ao B quando $f(x) < g(x)$, ou seja, $2x + 32 < 4{,}5x$, ou seja, $x < 2{,}8$ metros.

Solução do Exercício 5. Como as torneiras A e B despejam água na piscina com vazão constante, o volume de água despejado na piscina por cada torneira é proporcional ao tempo em que ela fica aberta. Assim, se durante 2 horas a torneira A enche 15% do volume da piscina, então em 4 horas ela encherá 30% do volume da piscina. Mas, quando as torneiras A e B ficam simultaneamente abertas durante 4 horas, elas conseguem encher 50% do volume da piscina. Daí, temos que a torneira B enche $50 - 30\% = 20\%$ do volume da piscina em 4 horas. Para saber durante quanto tempo x a torneira B deve ficar aberta para encher os 35% restantes do volume da piscina, basta utilizar a proporção $\frac{4}{x} = \frac{20\%}{35\%}$. Assim, a torneira B gastará $x = \frac{35 \cdot 4}{20} = 7$ horas para encher os 35% restantes.

Solução do Exercício 6. A proporção de toda a população que fica doente da enfermidade é $\frac{15}{100}$ e, entre os que ficam doentes, a proporção dos que morrem é $\frac{8}{100}$. Assim, a proporção da população que morre pela doença é $\frac{15}{100} \cdot \frac{8}{100} = \frac{1,2}{100} = 1,2\%$.

Solução do Exercício 7.

a) Com gasolina o carro faz $\frac{12,3}{2,49} = 4,94$ km por R$ 1,00. Para que o álcool seja mais vantajoso precisamos que o carro rode, com álcool, mais que 4,94 km com R$ 1,00. Logo, se o desempenho com álcool é y km/l, precisamos que $\frac{y}{1,59} > 4,94$, ou seja, $y > 7,85$. Ou seja, o desempenho com álcool deve ser maior que 7,85 km/l.

b) Observe que $g(x) = 2,49 \cdot \frac{100}{x} = \frac{249}{x}$ e $a(x) = 1,59 \cdot \frac{100}{x/2+1} = \frac{318}{x+2}$.

c) Precisamos ter $a(x) = g(x)$, ou seja, $\frac{249}{x} = \frac{318}{x+2}$, ou seja, $x = 7,22$ km/l, que deve ser o desempenho com gasolina. Com álcool, o carro deve fazer $\frac{7,22}{2} + 1 = 3,61$ km/l.

d) Supondo que o desempenho do carro seja x km/l com gasolina e y km/l com álcool e pensando em um percurso de L km, devemos ter o custo com gasolina maior que o custo com álcool, ou seja, $2,49 \cdot \frac{L}{x} > 1,59 \cdot \frac{L}{y}$, isto é, $y > 0,64x$, pois x e y são valores positivos. Um exemplo é um carro que faz 10 km/l com gasolina, que teria que fazer mais que 6,4 km/l com álcool para que o uso do álcool seja mais vantajoso.

Solução do Exercício 8.

a) A formiga anda $20 + 10 + 20 = 50$ cm até chegar em D.

b) Quando $x = 22$ cm ela está no ponto F do segmento BC que dista 2 cm do ponto B. Podemos considerar o segmento AD, com medida 10 cm, a base do triângulo ADF e sua altura será a distância do ponto F à base AD, distância esta igual a 20 cm. Portanto, a área do triangulo será $\frac{10 \cdot 20}{2} = 100$ cm^2.

c) Considerando sempre o segmento AD, com medida 10 cm, a base do triângulo ADF, sua área variará com a altura e será máxima quando a altura for máxima, ou seja, quando a altura for 20 cm. O cálculo acima nos dá a área máxima igual a 100 cm^2.

d) Quando o ponto F varia no lado AB, $0 \leq x \leq 20$ e o valor da área do triângulo ADF será $\frac{10x}{2} = 5x$ cm^2, que é expressão de uma função linear. A área será constante e igual a 100 cm^2, quando $20 \leq x \leq 30$. Para $30 \leq x \leq 50$, a expressão para a área será $\frac{10 \cdot (50-x)}{2} = -5x + 250$ cm^2, que é expressão de uma função afim. O gráfico pedido será o da figura abaixo.