Aula 02 – Ciclo 02

Professora Laís Pereira

EMEF Antônio Aires de Almeida

Gravataí

Exercício 1. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2017 – Nível 1 – Questão 17)

Após digitar um número de seis algarismos em sua calculadora, Cecília observou que dois algarismos 9 que ela havia digitado não apareceram no visor; o que apareceu foi 2017. Quantas são as possibilidades para o número que ela digitou?

Podemos dividir o problema em dois casos: quando os dois 9´s aparecerem juntos ou quando eles ficarem separados.

Observe o esquema: __2__0__1__7__

No primeiro caso, podemos colocar dois 9´s juntos em qualquer dos espaços vazios. Neste caso obtemos 5 possibilidades.

No segundo caso, escolhemos primeiramente um lugar para colocar o primeiro dos números 9 (5 possiblidades) e, a seguir, um lugar para colocar o segundo número 9 (4 possibilidades). Há nesse caso, então, 5 x 4 = 20 possibilidades; porém, como os dois números 9 são indistinguíveis, devemos dividir esse resultado por 2. Conclusão: há 10 possibilidades para o caso dos 9´s aparecerem separados. Logo, no total teremos 5 + 10 = 15 possibilidades.

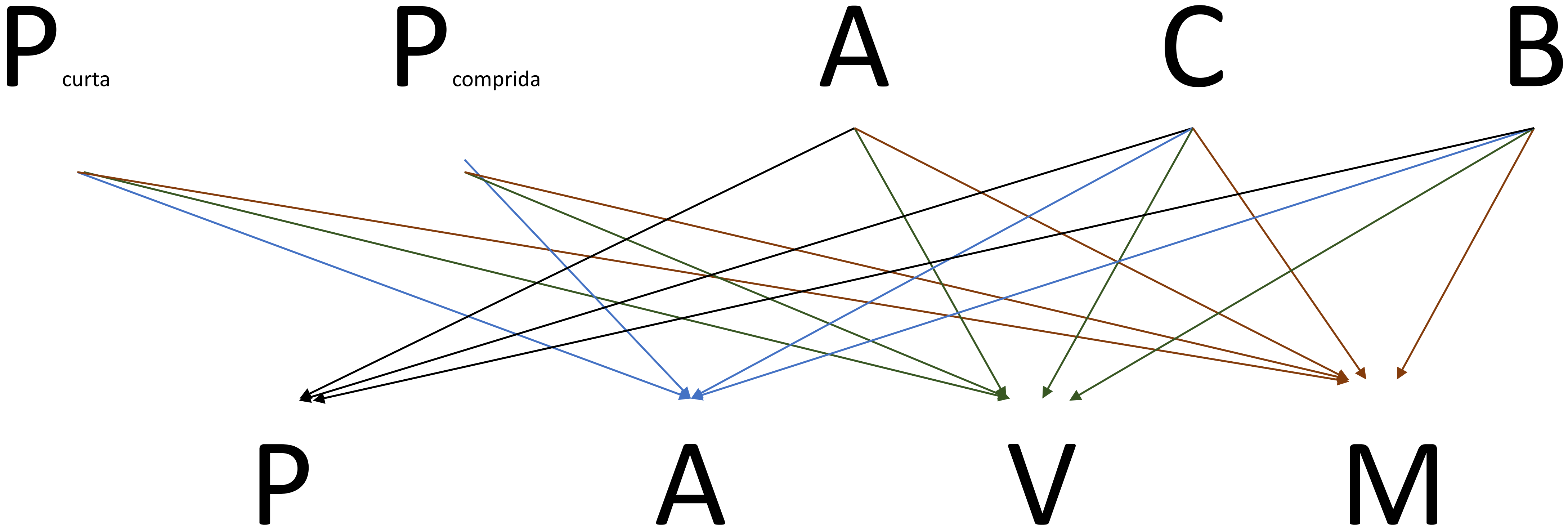
Exercício 2. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2005 – Nível 1 – Questão 9)

O Campeonato Brasileiro de Futebol de 2005 foi disputado por 22 times. Cada time enfrenta cada um dos outros duas vezes, uma vez em seu campo e outra no campo do adversário. Quantas partidas serão disputadas por cada time?

Como há 22 times no campeonato e cada time só não enfrenta a si próprio, então ele joga 21 vezes (com os outros 21 times) em seu campo e mais 21 vezes nos campos dos adversários. No total, cada time disputa $21 + 21 = 42$ partidas.

Exercício 3. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2008 – Nível 1 – Questão 18)

Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?



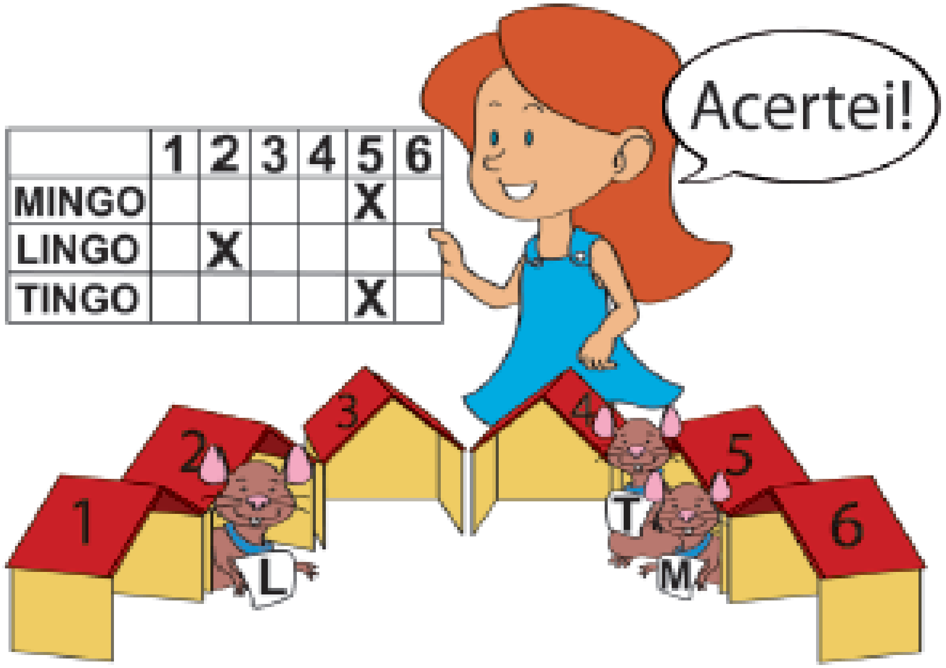
P curta
P comprida
A
C
B
P
A
V
M

Para cada uma das camisas pretas e azul é possível escolher três camisas de cor diferente, num total de 3x3=9 possibilidades; notamos que estar com uma camisa preta de mangas curtas é diferente de estar com uma de mangas compridas. Para as camisas cinza e branca podemos escolher qualquer calça, num total de 2x4=8 possibilidades. Ao final, temos 9+8=17 possibilidades.

Uma outra maneira de resolver a questão é a seguinte: são 5 as possibilidades de escolha de camisas e quatro a de calças, logo, sem levar em conta as cores, há 5x4=20 modos de se vestir. Destes, devemos descontar os casos em que se repetem as cores de calça e camisa, que são apenas três: camisa preta de mangas compridas com calça preta, camisa preta de mangas curtas com calça preta e camisa azul com calça azul. Logo, são 20–3=17 maneiras diferentes de se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas.

Exercício 4. (Prova 2ª fase da OBMEP 2011 – Nível 1 – Questão 4)

Cristina gosta de adivinhar em quais casinhas seus ratinhos Mingo, Lingo e Tingo irão se esconder, após ser aberta a gaiola em que eles moram. As casinhas são numeradas de 1 a 6 e dois ou mais ratinhos podem se esconder na mesma casinha. Ela registra suas previsões em cartões como os da figura, marcando um X em cada linha.



(A) De quantas maneiras Cristina pode preencher um cartão?
(B) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que os ratinhos se esconderão em três casinhas diferentes?
(C) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente?

(A)Cristina pode preencher cada uma das três linhas do cartão de 6 maneiras diferentes; logo o número de maneiras de preencher o cartão é 6x6x6=216.

(A)Se os ratinhos escolhem casinhas diferentes, então o primeiro tem 6 escolhas possíveis, o segundo tem 5 escolhas possíveis e o terceiro tem 4. Logo o número de maneiras em que Cristina pode preencher o cartão é 6x5x4=120.

(A)Há três pares de ratinhos: ML, MT e LT. Para preencher o cartão, Cristina deve escolher uma destas três possibilidades, em seguida ela deve escolher uma das seis casinhas para esses dois ratinhos a ocuparem e finalmente ela deve escolher uma casinha diferente para o terceiro ratinho. Logo o número de cartões possíveis neste caso é igual a 3x6x5=90.

Exercício 5. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2005 – Nível 1 – Questão 15)

Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

Os números da rifa comprados por Marcelo possuem quatro algarismos sendo que exatamente três deles são iguais a 7 e o outro algarismos é diferente de 7 e de 0. Observe primeiramente que existem 4 possíveis lugares para esse algarismo diferente aparecer: **777x**, **77x7**, **7x77** ou **x777**. Então para formar um desses números de rifa, primeiramente devemos escolher uma dessas quatro possibilidades e em seguida escolher uma das oito possibilidades para **x**, uma vez que ele deve ser diferente de 7 e de 0. Portanto Marcelo comprou 4x8=32 números de rifa.

Exercício 6. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2012 – Nível 2 – Questão 16)

Quantos são os números naturais entre 0 e 999 nos quais aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3?

Podemos pensar nos números naturais entre 0 e 999 como sequências de três algarismos de 000 até 999. Estamos interessados em contar as sequências em que aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3. Vamos contar separadamente os casos em que o número possui exatamente um algarismos 2, ou o número possui exatamente dois algarismos 2, ou o número possui exatamente três algarismos 2.

- Números com exatamente um algarismos 2. Esses números são da forma **2xx** ou **x2x** ou **xx2** em que **x** é qualquer algarismos diferente de 3 e de 2. Portanto o algarismo **x** pode ser escolhido de oito maneiras diferentes. Pelo princípio multiplicativo existem 3x8x8=192 desses números.

- Números com exatamente dois algarismos 2. Esses números são da forma **22x** ou **2x2** ou **x22** em que **x** é qualquer algarismos diferente de 3 e de 2. Portanto o algarismo **x** pode ser escolhido de oito maneiras diferentes. Pelo princípio multiplicativo existem 3x8=24 desses números.

- Existe apenas o número **222** com exatamente três algarismos 2.

Somando obtemos um total de 192+24+1=217 possibilidades.

Exercício 7. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2009 – Nível 1 – Questão 5)

Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul, preto ou vermelho de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir cada uma destas figuras?

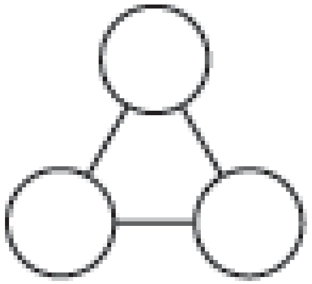


Figura 1

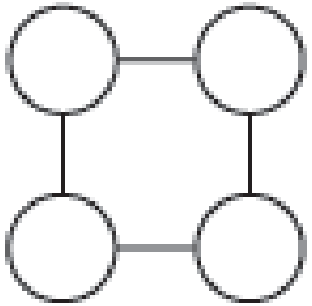


Figura 2

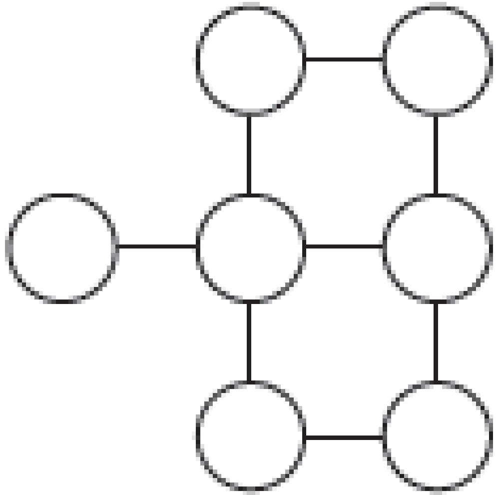


Figura 3

Figura 1. Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a figura 1 pode ser pintada de 3x2x1=6 maneiras diferentes.

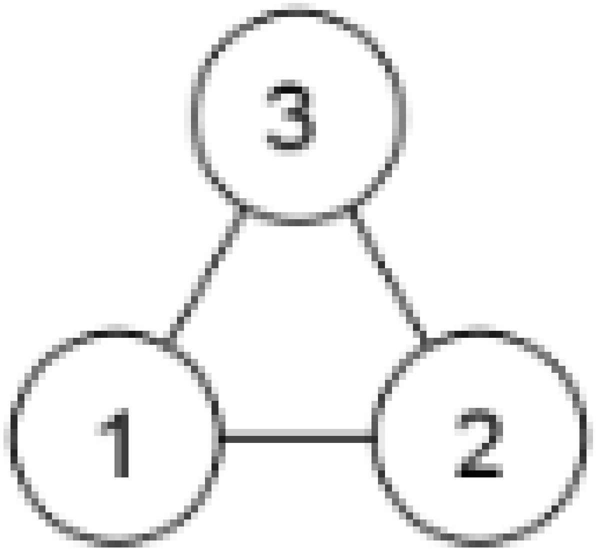


Figura 2. Vamos dividir as maneiras de pintar a figura 2 em dois casos.
1º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor. Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é 3x2x2=12.
2º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é 3x2x1=6.
No total, a figura 2 pode ser pintada de 12+6=18 maneiras diferentes.

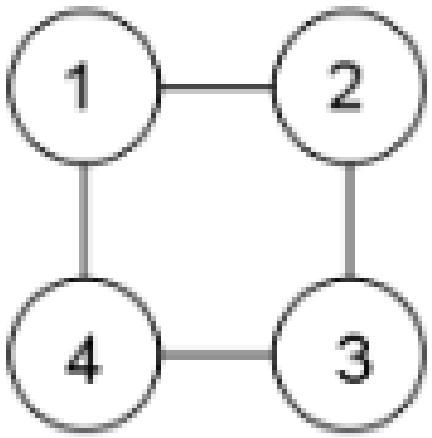
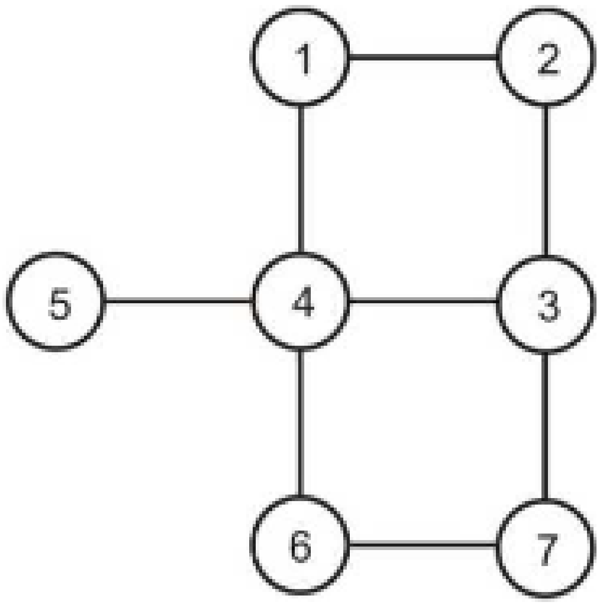


Figura 3. As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e, portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ela tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo temos 18x2=36 possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5. Dividimos agora nossa contagem em dois casos.

1º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor. Nesse caso, temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos 1x2=2 possibilidades.

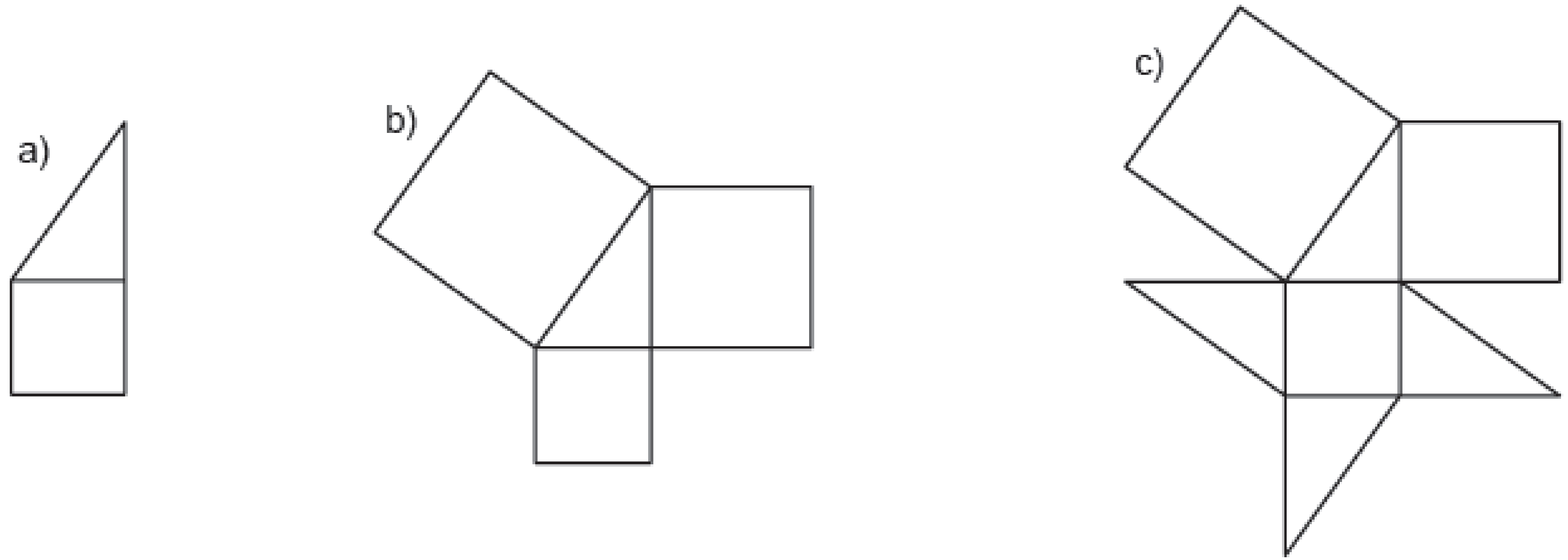


2º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade.

No total, há 36x2 + 36x1 = 108 maneiras diferentes de pintar a figura 3.

Exercício 8. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2011 – Nível 2 – Questão 5)

João vai pintar figuras compostas por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor. Determine de quantas maneiras João pode pintar cada uma das seguintes figuras.



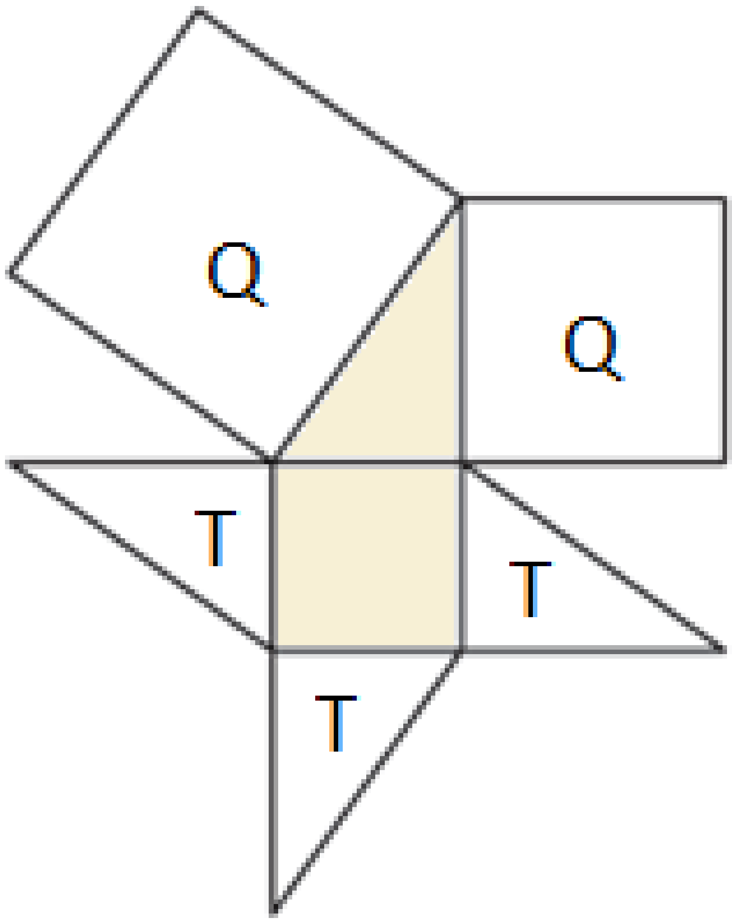
a) Podemos resolver alguns problemas de contagem através da listagem explicita de todas as possibilidades. No caso deste item, as possibilidades de cores para o quadrado e o triângulo são respectivamente: (azul, vermelho), (azul, amarelo), (vermelho, azul), (vermelho, amarelo), (verde, azul), (verde, vermelho) e (verde, amarelo). Portanto a primeira figura pode ser colorida de 7 maneiras diferentes. Observamos que estas 7 possibilidades serão utilizadas no item c.

a) Observe que os quadrados fazem fronteira apenas com o triângulo central. Deste modo, se sabemos qual é a cor do triângulo central, cada um dos três quadrados pode ser pintado com a mesma quantidade de possibilidades.

- Se o triângulo está colorido de azul, então cada quadrado pode ser colorido de duas maneiras: vermelho ou verde. Aqui obtemos 2x2x2=8 possibilidades.
- Se o triângulo está colorido de vermelho, então cada quadrado pode ser colorido de duas maneiras: azul e verde. Aqui obtemos 2x2x2=8 possibilidades.
- Se o triângulo está colorido de amarelo, então cada quadrado pode ser colorido de três maneiras: azul, vermelho ou verde. Aqui obtemos 3x3x3=27 possibilidades.

Então, ao todo, a segunda figura pode ser colorida de 8+8+27=43 possibilidades.

c) Observe que cada um dos quadrados indicados com a letra Q só faz fronteira com o triângulo sombreado. Daí a cor deste triângulo define quantas são as possibilidades de cores para os quadrados Q. Do mesmo modo, observe que cada um dos triângulos indicados com a letra T só faz fronteira com o quadrado sombreado. Daí a cor deste quadrado define de quantas maneiras cada um destes triângulos pode ser colorido. Daí podemos fazer uma contagem separando as 7 possibilidades de cores para o triângulo e o quadrado sombreado.



		Quantidade de possibilidades		
Triângulo sombreado	Quadrado sombreado	Quadrados Q	Triângulos T	Total de possibilidades
azul	vermelho	2	2	$2^2 \times 2^3 = 32$
	verde	2	3	$2^2 \times 3^3 = 108$
vermelho	azul	2	2	$2^2 \times 2^3 = 32$
	verde	2	3	$2^2 \times 3^3 = 108$
amarelo	azul	3	2	$3^2 \times 2^3 = 72$
	vermelho	3	2	$3^2 \times 2^3 = 72$
	verde	3	3	$3^2 \times 3^3 = 243$

Portanto existem $32 + 108 + 32 + 108 + 72 + 72 + 243 = 667$

maneiras diferentes de coloração da terceira figura.

Exercício 11. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2014 – Nível 2 – Questão 18)

O número 2014 tem quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0. Quantos números possuem exatamente essas características?

Vamos fazer essa contagem pensando em colocar os algarismos na unidade, dezena, centena e unidade de milhar do número. Como se trata de um número de quatro algarismos, o algarismo zero não pode ser colocado na unidade de milhar. Temos então 3 possibilidades para se colocar o algarismo zero. Colocado o zero sobram então três posições para se colocar o algarismo ímpar, e como há cinco algarismos ímpares, temos um total de $3 \times 5 = 15$ possibilidades para se colocar o algarismo ímpar no número. Colocado o algarismo zero e o algarismo ímpar, sobram duas posições para se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos. Fazemos a escolha do primeiro algarismo par não nulo e o colocamos na primeira posição ainda não preenchida do número (há apenas 4 possibilidades de escolha: 2, 4, 6 e 8). Finalmente, preenchemos a última posição com outro número par não nulo, diferente daquele anteriormente colocado (3 possibilidades). Temos assim $3 \times 4 = 12$ possibilidades de se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos no número. Pelo Princípio Multiplicativo, o total de possibilidades é $3 \times 15 \times 12 = 540$.

Exercício 2.

Amanhã o treinador João irá dividir 20 caramelos com os alunos de sua equipe de natação de modo que cada aluno receba a mesma quantidade de caramelos, o que sobrar ele levará de volta para casa. Sua equipe de natação é formada por 9 alunos. Porém, a piscina é aberta, está chovendo muito e ele não sabe ao certo quantos alunos irão ao treino de amanhã.

Qual é probabilidade de que o treinador João leve de volta para casa exatamente 2 caramelos?

(A) 1/9. (B) 1/3. (C) 1/2. (D) 2/3. (E) 4/9.

Se todos os 9 alunos forem ao treinos, efetuando a divisão de 20 por 9 obtemos:

$$20 = 2 \times 9 + 2 \quad \Rightarrow \quad \text{resto} = 2.$$

Efetuando as demais divisões por 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1 aluno(s) obtemos:

$$20 = 2 \times 8 + 4;$$

$$20 = 2 \times 7 + 6;$$

$$20 = 3 \times 6 + 2;$$

$$20 = 4 \times 5 + 0;$$

$$20 = 4 \times 4 + 0;$$

$$20 = 6 \times 3 + 2;$$

$$20 = 10 \times 2 + 0;$$

$$20 = 20 \times 1 + 0.$$

Podemos notar que o resto 2 ocorre exatamente 3 vezes e, portanto, a probabilidade de que João leve de volta para casa exatamente 2 caramelos é 3/9 = 1/3 (alternativa B).

Exercício 10.

Pedro e João combinaram de lançar uma moeda 4 vezes e observar a face superior que saiu. Pedro apostou que, nesses 4 lançamentos, não apareceriam 2 caras seguidas, João aceitou a aposta. Quem tem maior probabilidade de ganhar a aposta?

Sugestão: Liste todos os casos possíveis para os resultados dos quatro lançamentos.

Vamos considerar todas as sequências possíveis de resultados. Como em cada lançamento sai cara (C) ou coroa (K), há 2 possibilidades; logo, o número total de possibilidades é igual a 2 x 2 x 2 x 2 = 16. Todas essas sequências têm a mesma probabilidade de ocorrência, já que o resultado de um lançamento não afeta os demais e há a mesma chance de sair cara ou coroa:

CCCC, CCCK, CCKC, CKCC, KCCC, KKKC, KKCK, KCKK, CKKK, CCKK, CKCK, CKKC, KCKC, KCCK, KKCC, KKKK

Vamos agora verificar quais dessas sequências levam à vitória de Pedro.

- Se sair somente coroas (KKKK);
- Se sair uma cara somente (CKKK, KCKK, KKCK, KKKC);
- Com duas caras saindo, Pedro vence nos casos (KCKC), (CKCK) e (CKKC).
- Quando saem três ou mais caras, Pedro perde.

Logo, o número de sequências favoráveis a Pedro é igual a 8, e sua probabilidade de vitória é igual a 8/16 = 1/2. Portanto, Pedro e João têm a mesma chance de vitória.

Exercício 11.

Em um jogo idealizado na escola, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma casa; quando sai coroa, ele avança duas casas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

Pedro pode terminar o jogo de cinco maneiras diferentes, listadas abaixo:

1. cara, cara, cara - probabilidade 1/2 x 1/2 x 1/2 = 1/8.
2. cara, cara, coroa - probabilidade 1/2 x 1/2 x 1/2 = 1/8.
3. cara, coroa - probabilidade 1/2 x 1/2 = 1/4.
4. coroa, cara - probabilidade 1/2 x 1/2 = 1/4.
5. coroa, coroa - probabilidade 1/2 x 1/2 = 1/4.

Observe que Pedro termina com coroa nos casos 2, 3 e 5.

Como as alternativas acima são mutuamente exclusivas, a probabilidade de sua última jogada ser coroa é 1/8 + 1/4 + 1/4 = 5/8.

Exercício 12.

Para determinada prova são sorteados 3 dentre 5 itens e, para ser aprovado, o aluno deve acertar pelo menos 2 dos itens sorteados. Qual a probabilidade de ser aprovado o aluno que sabe resolver apenas 3 dos 5 itens?

Suponha por simplicidade na argumentação da resolução que dentre os itens Q1, Q2, Q3, Q4 e Q5, o aluno saiba resolver apenas os itens Q1, Q2 e Q3. Observe que a probabilidade se define como a razão entre casos favoráveis e casos possíveis e que cada item tem a mesma probabilidade de ser escolhido. Então, primeiramente, vamos determinar os casos favoráveis. O aluno para ser aprovado tem que acertar pelo menos dois itens (ou seja, duas ou três). Existe apenas uma possibilidade para acertar três itens, pois o aluno saber resolver somente Q1, Q2 e Q3. Para o caso em que o aluno acerta dois itens, primeiro escolhemos os dois itens que o aluno irá acertar para depois escolhermos a que ele vai errar. Nesse sentido temos as 6 possibilidades, ou seja, (Q1,Q2,Q4), (Q1,Q2,Q5), (Q1,Q3,Q4), (Q1,Q3,Q5), (Q2,Q3,Q4) e (Q2,Q3,Q5).

Dessa forma, aplicando o princípio aditivo, temos que o número de eventos favoráveis é dado por: 1(acertar três questões) + 6 (duas questões corretas e uma errada) = 7.

Para finalizar, o sorteio dos 3 itens dentre os 5 possíveis pode ser feito de 10 maneiras distintas, a saber: (Q1,Q2,Q3), (Q1,Q2,Q4), (Q1,Q2,Q5), (Q1,Q3,Q4), (Q1,Q3,Q5), (Q1,Q4,Q5) (Q2,Q3,Q4), (Q2,Q3,5), (Q2,Q4,Q5) , (Q3,Q4,Q5) .

Portanto, a probabilidade do aluno ser aprovado é P=7/10.

Questão 1. As peças da figura 1 são feitas de quadradinhos de cartolina cinza de um lado e branca do outro. A figura 3 mostra uma maneira de encaixar essas peças com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da figura 2. De quantas maneiras diferentes é possível fazer isso?

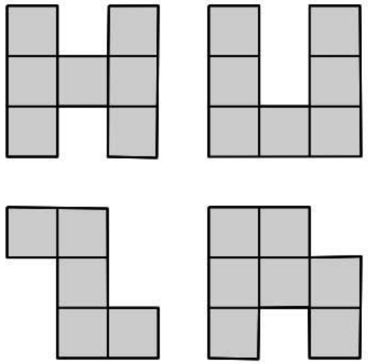


Figura 1

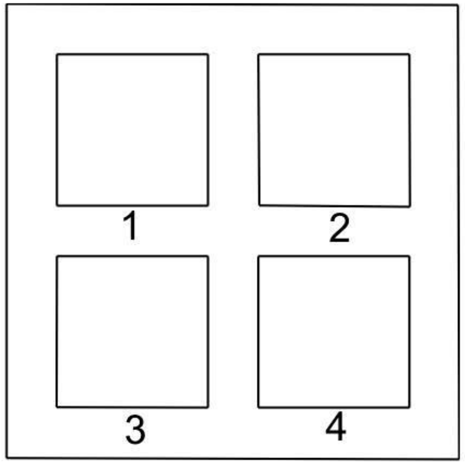


Figura 2

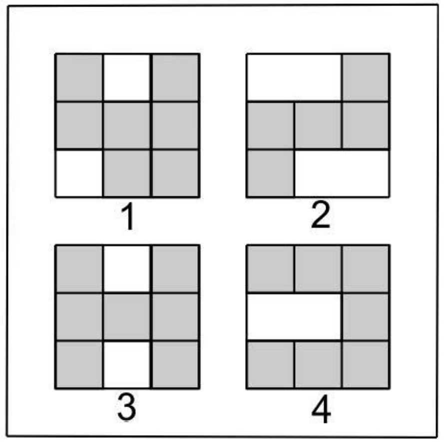


Figura 3

Vamos denotar as peças da figura 1, da esquerda para a direita e de cima para baixo, de H, U, Z e R. A peça H só pode ser colocada de duas maneiras diferentes em um quadrado, a peça U de quatro maneiras diferentes, a peça Z de duas maneiras diferentes e a peça R de quatro maneiras diferentes. Uma vez fixada a posição em que as peças vão entrar nos quadrados, pelo Princípio Multiplicativo, elas podem ser distribuídas nos quadrados da figura 2 de 4 x 3 x 2 x 1=24 maneiras diferentes. Logo o número de maneiras diferentes de colocar as peças nos quadrados é **(2 x 4 x 2 x 4) x 24 =1536**.

Questão 2. Um dado é lançado duas vezes e os números observados nas faces superiores são somados. Qual é a probabilidade dessa soma ser um número primo?

As tabelas a seguir podem ser interpretadas como o espaço amostral correspondente ao evento de se lançar um dado duas vezes e depois somar os resultados obtidos.

OS NÚMEROS OBSERVADOS						
	1	2	3	4	5	6
1	(1 , 1)	(1 , 2)	(1 , 3)	(1 , 4)	(1 , 5)	(1 , 6)
2	(2 , 1)	(2 , 2)	(2 , 3)	(2 , 4)	(2 , 5)	(2 , 6)
3	(3 , 1)	(3 , 2)	(3 , 3)	(3 , 4)	(3 , 5)	(3 , 6)
4	(4 , 1)	(4 , 2)	(4 , 3)	(4 , 4)	(4 , 5)	(4 , 6)
5	(5 , 1)	(5 , 2)	(5 , 3)	(5 , 4)	(5 , 5)	(5 , 6)
6	(6 , 1)	(6 , 2)	(6 , 3)	(6 , 4)	(6 , 5)	(6 , 6)

RESULTADO DA SOMA DOS NÚMEROS OBSERVADOS						
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Nas células destacadas e com números em negrito estão marcados, entre os 36 eventos possíveis, os 18 eventos favoráveis, isto é, os eventos que correspondem a soma dos dois lançamentos ser um número primo.

Assim, a probabilidade desejada é igual a 18/36=0,5 ou equivalentemente 50%.